**Государственное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
«Котовский индустриальный техникум»**

МАТЕМАТИКА
Модуль по теме: «Комплексные числа»

Котовск, 2014

Учебное пособие для студентов техникума II курса

Авторы:
Т.А. Букатина – преподаватель математики.

Модуль содержит теоретический материал, необходимый при изучении темы: «Комплексные числа». В конце изложения теории приводятся примеры решения типовых задач по данной теме. Модуль завершается блоком заданий для самостоятельной работы, вопросами для повторения и зачетными работами.

Модуль составлен в соответствии с программой по математике, рекомендованной Министерством образования и науки РФ для средних специальных учебных заведений.

Данный модуль может быть использован на учебных занятиях и для самостоятельной подготовки студентов всех специальностей.

Комплексные числа

Предварительные замечания

Во многих разделах математики и ее приложений невозможно ограничиться рассмотрением лишь действительных чисел. Это заставляет обобщать понятие числа и ввести в рассмотрение множество комплексных чисел, включающее множество действительных чисел.

С расширением множества рассматриваемых чисел мы неоднократно встречались. Наше представление о числе изменялось по мере расширения круга задач, которые необходимо решать.

Если для счета отдельных предметов достаточно натуральных чисел, то, например, для решения уравнений $px+q=0$, где $p \in N$ и $q \in N$, натуральных чисел мало – нужны рациональные числа. В свою очередь, рациональных чисел оказывается недостаточно для измерения длин отрезков. Чтобы любому отрезку можно было приписать длину, необходимо добавить к рациональным числам числа иррациональные, т.е. под числом понимать действительное число. Ограничившись рассмотрением только рациональных чисел, невозможно было бы решить уравнение $x^2 - 2=0$, так как во множестве рациональных чисел это уравнение не имеет решений.

Но и действительных чисел оказывается недостаточно для решения алгебраических уравнений. Ведь в множестве действительных чисел не имеют решений квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, в том числе простейшие квадратные уравнения с натуральными коэффициентами, например: $x^2 + 1=0$, $x^2 + x + 1=0$.

Для решения алгебраических уравнений требуется дальнейшее обобщение понятия числа, введение комплексных чисел. Оказывается, что в множестве комплексных чисел содержатся не только все решения каждого квадратного уравнения, но и все решения алгебраических уравнений любой степени с действительными или комплексными коэффициентами.

Комплексные числа часто называют мнимыми. Это название не вполне удачно, так как оно может создавать представление о комплексных числах как о чем-то нереальном. Оно объясняется тем, что, хотя комплексные числа стали употребляться еще в XVI веке, они долго продолжали казаться даже выдающимся математикам чем-то реально не существующим, мнимыми в буквальном смысле этого слова. Одному из создателей дифференциального и интегрального исчислений, немецкому математику Г.Лейбницу (1646–1716), принадлежат, например, такие слова: «Комплексное число – это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием». Сейчас от всей этой мистики не осталось ничего, кроме, пожалуй, названия «мнимые числа». Уже во времена К.Гаусса (1777–1855) было дано геометрическое истолкование комплексных чисел как точек плоскости. Трудами выдающихся математиков XIX века О.Коши, Б.Римана и К.Вейерштрасса на базе комплексных чисел была построена одна из самых красивых математических дисциплин – теория функций комплексной переменной.

1. Определение комплексного числа.

В настоящей главе мы расширим наше представление о числовых множествах. Одной из причин, которая приводит к необходимости расширения множества действительных чисел, связана с решением квадратных уравнений. Например, даже такое квадратное уравнение, как $x^2+1=0$, не имеет решения в множестве действительных чисел, так как не существует такого действительного числа *a*, что $a^2+1=0$.

Итальянские математики XVI в. Дж. Кардано и Р.Бомбелли, решая квадратные уравнения вида $x^2+a^2=0$,ввели в рассмотрение символ $\sqrt{-1}$, который в XVIII в. Петербургский математик Л.Эйлер (1708–1783) обозначил через *i.* Формальное решение уравнения $x^2+a^2=0$ при использовании этого символа сводиться к тому , что $x_{1,2}=\pm a\sqrt{-1}$ или, используя обозначение Эйлера, $x_{1,2}=\pm ai$.

Таким образом, возникает необходимость в расширении множества действительных чисел до нового множества, такого, чтобы в этом множестве уравнения вида $x^2+a^2=0$ имели решения.

Ниже мы изложим краткую теорию такого решения.

Определение 1.<u>*Комплексным числом z*</u> называется выражение вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2=-1$.

Число a называется *действительной частью* комплексного числа, *bi-мнимой частью, i-мнимой единицей*.

Множество комплексных чисел обозначается буквой **C**.

Заметим, что множество **R** действительных чисел содержится в множестве комплексных чисел **C**: $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. В самом деле, всякое действительное число a можно рассматривать как комплексное число вида $a+0i$.

Комплексные числа вида bi называются *чисто мнимыми.* Они получаются из комплексных чисел $z=a+bi$ при $a=0$.

Определение 2. Два комплексных числа $z_1 = a+bi$ и $z_2=c+di$ называются *<u>равными</u>*, если, соответственно, равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т.е. если $a=c$, $b=d$.

Комплексное число $z=0+0i$ называется нулем и обозначается через 0. Оно совпадает с числом нуль множества действительных чисел. Таким образом, $z=a+bi=0$ тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$, или, что то же самое, когда $a^2+b^2=0$.

Определение 3. Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *комплексно-сопряженными.*

Число комплексно-сопряженное числу z, обозначается через $\overline{z}$. Так, если $z=a+bi$, то $\overline{z}=a-bi$, если же $z=a-bi$, то $\overline{z}=a+bi$. Понятие сопряженности взаимное. Например, для комплексного числа $z=-2+4i$ комплексно-сопряженным является комплексное число $\overline{z}=-2-4i$; точно также для комплексного числа $-2-4i$ комплексно-сопряженным является число $-2+4i$.

Комплексным числам можно дать геометрическую интерпретацию. Комплексное число $z=a+bi$ геометрически можно представить точкой координатной плоскости Oxy с координатами a,b (рис. 1).

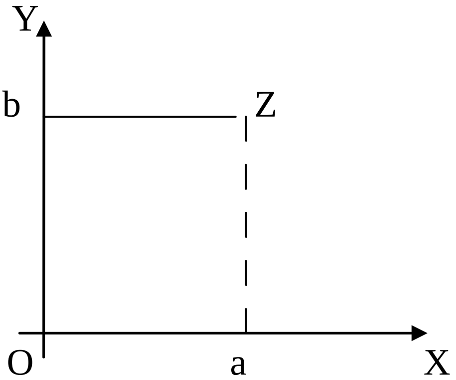


Рис.1

Плоскость, служащая для изображения множества комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью.* Так как любое комплексное число единственным образом определяется его действительной и мнимой частями, то *каждому комплексному числу в комплексной плоскости соответствует единственная точка на плоскости.* Очевидно, что справедливо и обратное утверждение: *каждой точке (x;y)плоскости Oxy соответствует единственное комплексное число* $z=x+yi$. Таким образом, между множеством комплексных и множеством точек плоскости существует взаимнооднозначное соответствие. При этом соответствии всякому действительному числу $z=a+0i$ соответствует точка *A(a;0)* оси абсцисс, а всякому чисто мнимому числу $z=0+bi$–точка *B(0; b)* оси ординат. Числу $z=i$ соответствует точка *C(0; 1)* (рис. 2).

Если каждой точке *M* комплексной плоскости поставить в соответствие радиус-вектор $\overline{ÎÌ}$ этой точки, то между множеством комплексных чисел и множеством радиус-векторов можно также установить взаимнооднозначное соответствие.

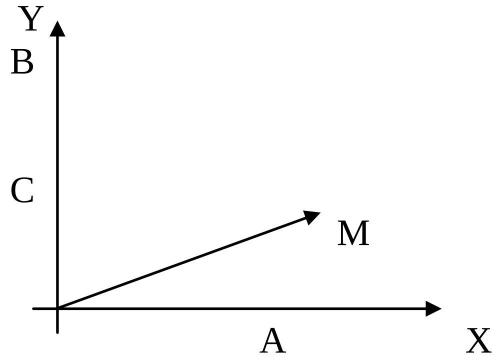


Рис.2

Ось *Ox* будем называть *действительной осью*, а ось *Oy* – мнимой.

Из определения комплексно-сопряженных чисел следует, что числа z и $\overline{Z}$ на комплексной плоскости расположены симметрично относительно действительной оси Ox (рис.3).

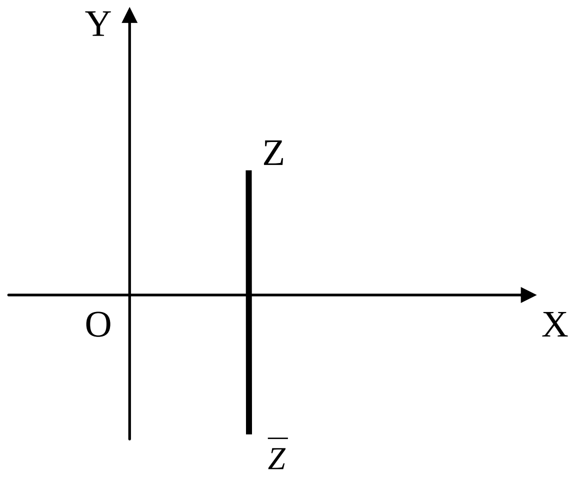


Рис.3

Мы знаем, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, для которого дискриминант $D=b^2-4ac<0$, в множестве **R(**действительных чисел) не имеет решения, так как корень из отрицательного числа в этом множестве не имеет действительного значения. Однако в множестве **C** (комплексных чисел) такое уравнение имеет два комплексно-сопряженных решения. В самом деле, пусть дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, причем $D<0$. Решения этого уравнения $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ представим в виде

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm i\sqrt{-D}}{2a},$$ где уже -D>0,

а потому $\sqrt{-D}$ есть некоторое действительное число. Следовательно, решениями квадратного уравнения будут два комплексно-сопряженных числа

$$x_1=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Пример. Решить квадратное уравнение $2x^2-6x+9=0$.

Решение. Находим:

$$x_1=\frac{6\pm\sqrt{36-72}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{6\pm 6i}{4}=\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}i.$$

Итак, в множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет решения.

Упражнения

1.1. На комплексной плоскости построить точки:

a) $z=2+2i$;

b) $z=i$;

c) $z=-1-i$;

d) $z=-1+i$;

e) $z=-i$;

f) $z=-4$.

1.2. Найдите комплексно-сопряженные числа для следующих чисел и постройте их на комплексной плоскости:

a) $z=3-2i$; *Ответ:* $\overline{z}=3+2i$

b) $z=-2-i$; *Ответ:* $\overline{z}=-2+i$

c) $z=5i$; *Ответ:* $\overline{z}=-5i$

d) $z=i$; *Ответ:* $\overline{z}=-i$

e) $z=6$. *Ответ:* $\overline{z}=6$

1.3. Решить квадратные уравнения:

a) $x^2+x+1=0$; *Ответ:* $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $x^2-x+1=0$; *Ответ:* $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $x^2+1=0$; *Ответ:* ± 1

d) $2x^2+3=0$; *Ответ:* $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

e) $x^2-10x+41=0$. *Ответ:* $5\pm 4i$

1.4. Найти действительные числа x и y из условия равенства комплексных чисел:

a) $9+2xi+4yi=10i+5x-6y$; *Ответ:* $(1; 3)$

b) $(1+i)x+(2+i)y=3i+1$; *Ответ:* $(5; -2)$

c) $5x-2y+(x+y)i=4+5i$. *Ответ:* $(2; 3)$

2.Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Действия над комплексными числами определяются таким образом, чтобы для частного случая действительных чисел эти операции совпадали с известными операциями над ними.

1) *<u>Сумма z</u>* комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ определяется как комплексное число $z=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$. Его обозначают таким образом,

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$

В частности, если $z=a+bi$, то $\overline{z}=a-bi$,поэтому $z+\overline{z}=2a$, следовательно, *сумма комплексно-сопряженных чисел есть число действительное.* Операцию сложения легко распространить и на сумму любого конечного числа комплексных чисел. Так, если $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i, \ldots, z_n=a_n+b_ni$, то

$z_1+z_2+\ldots+z_n = (a_1+a_2+\ldots+a_n) + (b_1+b_2+\ldots+b_n)i.$

Пример1.

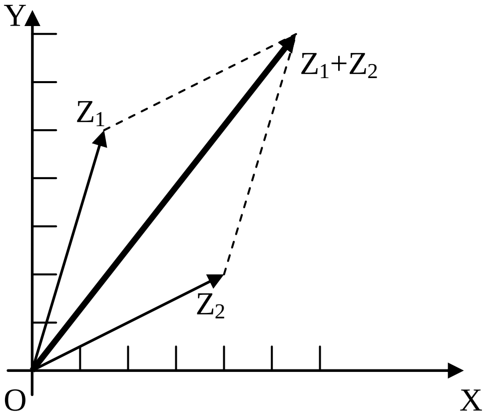
Выполнить действие: $(4+2i)+(1+5i)$

По правилу сложения комплексных чисел получим

$(4+2i) + (1+5i) = (4+1) + (2i+5i) = 5+7i$, или

$(4+2i) + (1+5i) = \underline{4}+2i+\underline{1}+5i=5+7i$

Сложение комплексных чисел сводится к сложению векторов, изображающих эти числа. Действие над заданными векторами иллюстрируются геометрически на рисунке



2) <u>*Вычитание*</u> *двух комплексных чисел определяется как операция обратная сложению.* Комплексное число $z = a+bi$ называется *разностью* комплексных чисел $z_1 = a_1+b_1 i$ и $z_2 = a_2+b_2 i$, если $z_1=z+z_2$. Разность комплексных чисел z_1 и z_2, обозначается z_1-z_2.

Из определения следует, что

$z_1-z_2 = (a_1-a_2) + (b_1-b_2)i$.

В частности, $z-\overline{z} = a+bi-a+bi=2bi$.

Пример 2.

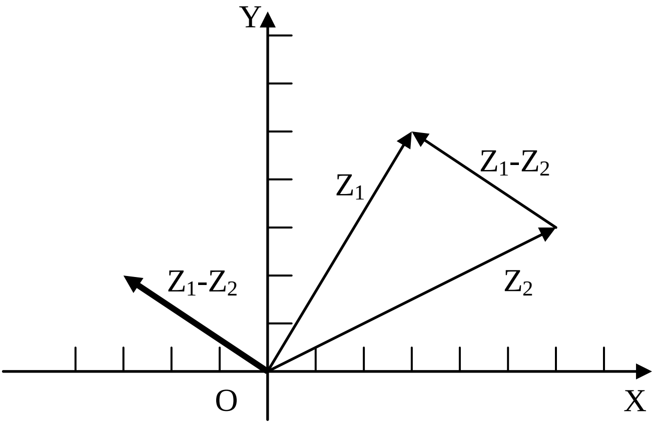
Выполнить действие $(3+5i)-(6+3i)$ и изобразить геометрически.

Решение:

$(3+5i) - (6+3i) = (3-6) + (5-3)i = -3+2i$, или

$(3+5i)-(6+3i) = \underline{3}+5i-\underline{6}-3i = -3+2i$.

I способ.

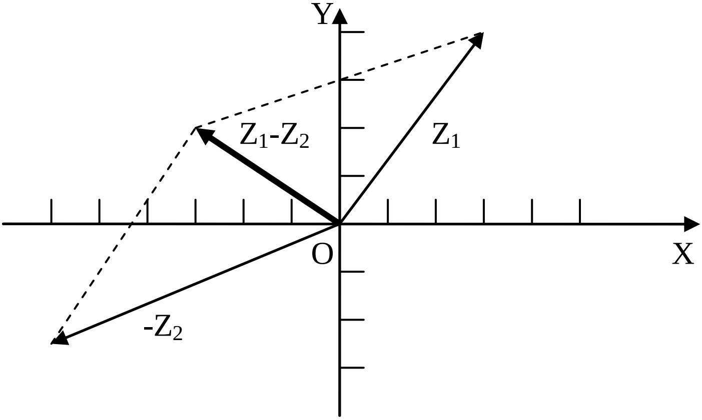


II способ.

$z_1 = 3+5i;\ z_2 = 6+3i$

$$-z_2 = -6-3i.$$

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$



3) *Умножение* двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ определяется следующим образом:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \qquad (1)$$

Отсюда следует, что два комплексных числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ можно умножать по правилу умножения многочленов при условии, что $i^2 = -1$. В самом деле, $z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (сравните результат с определением (1)). В частности, если $z = a + bi$, то $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Пример 3.

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 3 + 2i$ и $z_2 = -1 - i$.

Решение:

Очевидно, что $z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(-1-i) = -3 - 3i - 2i - 2i^2 = -3 - 5i - 2(-1) = -1 - 5i$.

4) *Деление* вводится как действие, обратное умножению. *Частным от комплексного числа* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *на число* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *называется комплексное число* $z_3 = a_3 + b_3 i$ *такое, что* $z_1 = z_3 \cdot z_2$, *т.е.* $a_1 + b_1 i = (a_3 + b_3 i)(a_2 + b_2 i)$. Отсюда на основании равенства (1) получаем:

$$a_1 = a_2 a_3 - b_2 b_3; \quad b_1 = a_2 b_3 + a_3 b_2. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (2) относительно a_3 и b_3 находим:

$$a_3 = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \quad b_3 = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.,$$

причем, $a^2 + b^2 \neq 0$, так как по условию $z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0$. Таким образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i. \qquad (3)$$

Равенство (3) можно получить путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ на число, комплексно-сопряженное знаменателю.

Пример 4.

Найти частное от деления комплексного числа $z_1 = 3+4i$ на число $z_2 = 2-5i$.

Решение: Очевидно, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2-5i} = \frac{(3+4i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{6+15i+8i+20i^2}{4+25} =$$

$$= \frac{6+23i+20\cdot(-1)}{29} = -\frac{14}{29} + \frac{23}{29}i \quad .$$

5) <u>*Возведение комплексного числа $z = a+bi$ в степень n*</u> рассматривается как частный случай умножения комплексных чисел:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n}.$$

Пример5.

$(2+i)^2 = 4+2\cdot 2i + i^2 = 4+4i-1 = 3+4i.$

6) Найдем натуральные степени мнимой единицы i. На основании равенства (1) получаем:

$i^2 = -1;$

$i^3 = i^2 \cdot i = - i;$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1;$

$i^5 = i^4 \cdot i = i;$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1;$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i;$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1,$

и вообще

$i^{4n} = 1;\quad i^{4n+1} = i;\quad i^{4n+2} = -1;\quad i^{4n+3} = -i;$

где n–любое натуральное число.

Пример 6.

Найти i^{59}.

Решение. При делении числа 59 на 4 имеем: 59=14·4+3, поэтому $i^{59} = i^{14*4+3} = \left(i^4\right)^{14} \cdot i^3 = i^3 = -1$.

Упражнения

2.1. Даны числа $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-2i$. Найдите числа:

a) $z_1 + z_2$; *Ответ:* $3-i$

b) $z_1 - z_2$; *Ответ:* $1+5i$

c) $z_1 \cdot z_2$; *Ответ:* $8-i$

d) $\frac{z_1}{z_2}$. *Ответ:* $-0{,}8+i$

2.2. Дано: $z=2+i$. Найдите z^n, если n=2, 3, 4.

Ответ: $3-4i;\ 2+11i;\ -7-24i$

2.3. Найдите x и y из уравнения $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$, *где* $x, y \in \mathbf{R}$. *Ответ:* $\left(-\frac{4}{11}; \frac{5}{11}\right)$

2.4. Вычислите:

a) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; *Ответ:* $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b)\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^4.$ *Ответ:* $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.5. Разложите на комплексные множители:

a) m^2+n^2;

b) $4n^2+9m^2$;

c) $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{16}$;

d) $m+n$;

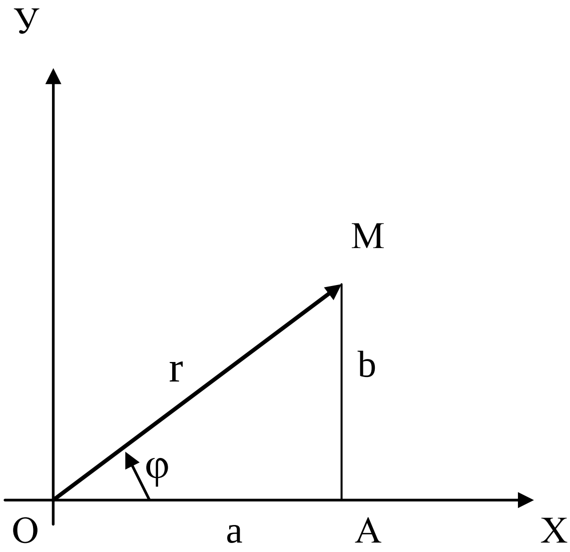
e) $1+\sin^2\alpha$.

3. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Как уже было сказано комплексное число $a+bi$, не равное нулю, изображается радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, причем длина этого вектора есть модуль комплексного числа $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Угол φ между положительным направлением оси Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$ называется *аргументом комплексного числа* $a+bi$. Этот угол принято отсчитывать от оси Ox к вектору $\overrightarrow{OM}$, что показано стрелкой на чертеже.

Если комплексное число равно нулю, то вектор $\overrightarrow{OM}$ обращается в точку (нуль-вектор) и говорить о его направлении нет смысла. Поэтому считают, что число нуль не имеет аргумента. Очевидно, что каждое комплексное число, не равное нулю, имеет бесконечное множество значений аргумента; эти значения отличаются друг от друга на целое число полных оборотов, т.е. на величину *2πк*, где *к*–любое целое число; например, аргументом комплексного числа *2+2i* являются углы вида $\frac{\pi}{4}+2\pi\kappa$ (κ=0, ± 1, ± 2, ± 3, …).



Значение аргумента, взятое в пределах первой окружности, т.е. от *0* до 2π, называется *главным.*

Так, например, для комплексного числа *2+2i* главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{4}$, для числа *–2+2i* главное значение аргумента равно $\frac{3\pi}{4}$. Для чисел *3, –3, i, –i* главные значения равны соответственно *0,* π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.

По рис. имеем:

$a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$,

откуда

$a+bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа, в отличие от формы $a+bi$, называемой *алгебраической.*

Для определения аргумента φ пользуемся формулами

$\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$ $\left(r = \sqrt{a^2+b^2}\right)$.

В зависимости от знака действительной и мнимой частей выбирается соответствующая четверть, в которой должен оканчиваться угол φ.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме число $-1+i\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2;$$

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2}\ ; \quad \left(\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ и } \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\right).$$

Так как $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то φ следует взять равным $\dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно,

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Пример 2. Представить в тригонометрической форме число $-1-i$.

Имеем:

$$r = \sqrt{2}\ ; \quad \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ; \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$.

Итак, $-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Пример 3. Представить в тригонометрической форме число 1.

Имеем $r=1$, $\varphi=0$; следовательно, $1=1(\cos 0+ i \sin 0)$, или $1= \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k$.

4. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1); \quad z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2). \qquad (1)$$

Перемножая их, получим

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)= r_1 r_2 \cdot$$
$$\cdot(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 -$$
$$-\sin\varphi_1 \sin\varphi_2)= r_1 r_2 \cdot((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)+$$
$$+i \cdot(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1))= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2)+i\cdot$$
$$\cdot\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

т.е.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2)+i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (2)$$

Таким образом, *при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются:*

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| , \arg(z_1 z_2)=\arg z_1 +\arg z_2 .$$

Пример 1.

Дано $z_1 =2(\cos 60^0 + i \sin 60^0)$; $z_2 =3(\cos 120^0 +i \sin 120^0)$. Вычислить $z_1 z_2$.

Решение. Применяем формулу (2):

$$z_1 z_2 =2*3(\cos(60^0 +120^0)+i \sin(60^0 +120^0))=6(\cos 180^0 +$$
$$+i \sin 180^0)=-6.$$

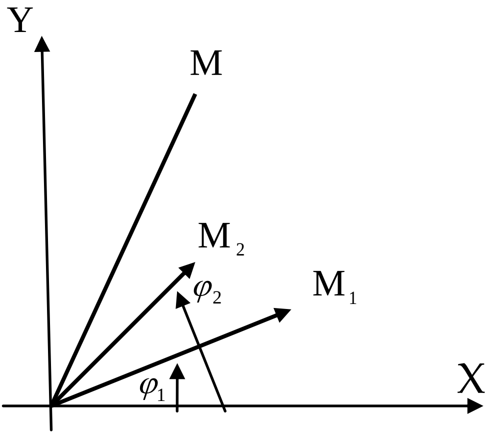


Рис. 1

На комплексной плоскости числа z_1 и z_2 представим, соответственно, векторами $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 1). Чтобы построить вектор $\overrightarrow{OM}$, изображающий комплексное число $z = z_1 z_2$, надо (см. равенство (2)) вектор $\overrightarrow{OM}_1$ повернуть на угол φ_2 против часовой стрелки, затем умножить его длину на число r_2. Это есть геометрическая интерпретация умножения комплексных чисел.

В частности, так как $i=1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, то умножение любого комплексного числа z на число i с геометрической точки зрения можно рассматривать как операцию поворота вектора, изображающего число z, на угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в положительном направлении (против движения часовой стрелки). Разделим теперь первое комплексное число (1) на второе:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot$$
$$\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Таким образом, *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad arg\,\frac{z_1}{z_2}=arg\,z_1-arg\,z_2.$$

Пример 2.

Дано $z_1=3(cos\,30^0+i\,sin\,30^0)$, $z_2=2(cos\,60^0+i\,sin\,60^0)$.

Вычислить $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3(\cos 30^0+i\sin 30^0)}{2(\cos 60^0+i\sin 60^0)}=1{,}5(\cos(30^0-60^0)+i\sin(30^0-60^0))=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i\,.$$

Для построения вектора $\overrightarrow{OM}$, изображающего комплексное число $z=\frac{z_1}{z_2}$, нужно вектор $\overrightarrow{OM_1}$, изображающий комплексное число z_1, повернуть на угол φ_2 по часовой стрелке и уменьшить его длину в r_2 раз.

Деление комплексного числа z на число i с геометрической точки зрения можно рассматривать как операцию поворота радиус-вектора точки z на угол $\varphi=\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.

Возведение комплексного числа $z=r(cos\varphi+i\,sin\varphi)$ в натуральную степень n рассматривается как n–кратное умножение z на само себя:

$$z^n=zz...z=rr...r(\cos(\varphi+\varphi+...+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi+...+\varphi)),$$

т.е.

$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. (3)

Таким образом, *при возведении комплексного числа в степень n модуль этого числа возводится в степень n, а аргумент умножается на n:*

$|z^n| = |z|^n$; $arg(z^n) = n\ arg\ z$.

Формулу (3) можно записать в виде

$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. (4)

В частности, при $r=1$ из равенства (4) следует *формула Муавра*, имеющая широкое применение в математике:

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Пусть *n*– натуральное число. *Корнем n–й степени* из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$ называется комплексное число $w = p(\cos\theta + i\ \sin\theta)$, для которого $w^n = z$. Это число обозначается $w = \sqrt[n]{z}$.

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число, кратное 2π, то

$$p^n = z, \quad n\theta = \varphi + 2\pi\kappa,$$

откуда

$$p = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}.$$

Таким образом,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \qquad (5)$$

Подставляя вместо *к* значения *0, 1, 2,…, n–1*, получим *n* различных значений корня. Для *к = n, n+1, n+2,…* или *к=–1, –2, …*корни будут принимать полученные ранее значения.

Так, например, при *к=2* имеем: $\sin\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}=\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}$
и при *к= n+2*

$$\sin\frac{\varphi+2\pi(n+2)}{n}=\sin\left(\frac{\varphi+4\pi}{n}+2\pi\right)=\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}.$$

Читатель может проверить, что и для функции косинуса получается то же самое.

Пример 4. Найти все значения $\sqrt[5]{1}$.

Решение. Так как *1=1(cos0+ i sin0)*, то

$$\sqrt[5]{1(\cos 0+i\sin 0)}=1\left(\cos\frac{0+2\pi\kappa}{5}+i\sin\frac{0+2\pi\kappa}{5}\right),\ \kappa=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Придавая *к* последовательно значения *0, 1, 2, 3, 4,* соответственно, получим:

$z_1=1$ при *к=0*;

$z_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ при *к=1;*

$z_3=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$ при *к=2;*

$z_4=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$ при *к=3;*

$z_5=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$ при *к=4.*

Дадим геометрическую интерпретацию полученных значений $\sqrt[5]{1}$. Модули всех этих значений равны 1. Следовательно, точки z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Построив аргументы значений $z_1,...,z_5$ (рис. 2), заметим, что точки, изображающие числа $z_1,...,z_5$, являются вершинами правильного пятиугольника.

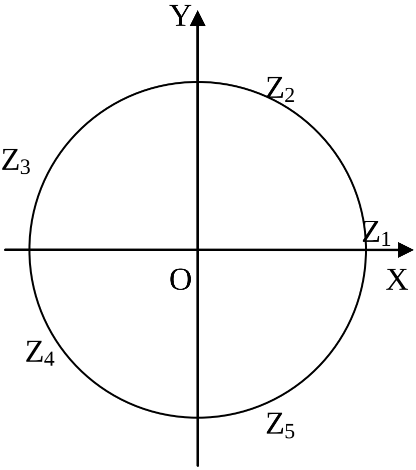


Рис. 2

Исходя из формулы (5) можно показать, что геометрически точки, соответствующие различным значениям корня *n*-й степени из комплексного числа $z= r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$, располагаются в вершинах правильного *n*-угольника с центром в точке O, причем одна из вершин (соответствующая $\kappa=0$) имеет полярные координаты $\left(\sqrt[n]{r};\frac{\varphi}{n}\right)$.

Упражнения

4.1. Дано $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad z_2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$

Найдите:

a) $\frac{z_1}{z_2}$;

b) $z_1 z_2$;

c) z_1^3;

d) $\sqrt{z_1}$;

e) $\overline{z_1 z_2}$;

f) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

4.2. Докажите, что

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot(1+i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

4.3. Упростите $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}$.

4.4. Вычислите: $(1+i)^6$.

4.5. Извлеките корни:

a) $\sqrt[3]{i}$;

b) $\sqrt[3]{2-2i}$;

c) $\sqrt[4]{-4}$;

d) $\sqrt[6]{1}$.

5. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Действия над комплексными числами в показательной форме

Найдем тригонометрическую форму комплексного числа z, если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Так как в записи $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ выражение $r\cos\varphi$ есть действительная часть, а $r\sin\varphi$ – мнимая часть и комплексно-сопряженные числа отличаются знаком мнимых частей, то

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi). \qquad (1)$$

Функция косинус – четная, а синус – нечетная, поэтому соотношение (1) можно записать в виде

$z = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$.

Из геометрических соображений можно заключить, что точка, изображающая комплексное число $\bar{z}$, получается из точки, изображающей число z, в результате ее симметричного отображения относительно оси абсцисс. Значит,

$$|\bar{z}| = |z|,\ arg\,\bar{z} = -arg\,z.$$

Из правил умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме следует, что аргумент комплексного числа ведет себя так же, как показатель степени при умножении степеней с одинаковыми основаниями: $a^x a^y = a^{x+y}$. Это обстоятельство навело Л.Эйлера на мысль представлять комплексные числа в виде

$$z = r_2 e^{i\varphi}, \qquad (2)$$

где e–основание натурального логарифма.

К комплексным числам, записанным в форме (2), применимы правила действий над степенью. А именно, если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_1 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\cdot\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, откуда следует известные нам правила:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ arg(z_1 z_2) = arg\,z_1 + arg\,z_2.$$

Аналогично получаем

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$, т.е. при делении комплексных чисел справедливы равенства

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ и } arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\,z_1 - arg\,z_2.$$

Далее, возведя комплексное число (2) в степень n, получим

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Таким образом, представление комплексного числа в виде (2) формально находит оправдание. Запись (2) называется *показательной* или *экспоненциальной формой комплексного числа.*

Если z представлено в форме (2), то комплексно-сопряженное число $\bar{z} = re^{-i\varphi}$.

Сравнивая записи комплексного числа в известных нам формах, будем иметь

$$z = a+bi= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)= re^{i\varphi}.$$

При $r=1$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (3)$$

Это соотношение называется *тождеством Эйлера.*

Аналогично можно записать

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (4)$$

Путем сложения и вычитания равенств (3) и (4), соответственно получаем

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}.$$

Эти равенства находят широкое применение в различных вопросах математики.

Пример.

Представить в показательной форме комплексное число $z=-2+2\sqrt{3}i$.

Решение.

Находим $r = \sqrt{4+12} = 4$; $\sin\varphi = -\frac{1}{2}; \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Следовательно, $z = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Упражнения

5.1. Представьте в показательной форме комплексные числа:

a) $2+2i$; *Ответ:* $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

b) $1+\sqrt{3}i$; *Ответ:* $2e^{\frac{\pi}{3}i}$

c) $-1-\sqrt{3}i$. *Ответ:* $2e^{\frac{7\pi}{6}i}$

5.2. Представьте в алгебраической форме комплексные числа:

a) $z = 5e^{1,5i}$;

b) $z = 2e^{0,5i}$;

c) $z = 3e^{-i}$.

5.3. Дано $z_1 = 2e^{-i}$ и $z_2 = \frac{1}{2}e^{0,5i}$. Найдите

a) $\overline{z_1}$; *Ответ:* $2e^{i}$

b) $z_1 z_2$; *Ответ:* $e^{-0,5i}$

c) $\frac{z_1}{z_2}$; *Ответ:* $4e^{-1,5i}$

d) $z_1 \overline{z_2}$; *Ответ:* $e^{-1,5i}$

e) $\overline{z_1} z_2$; *Ответ:* $e^{1,5i}$

f) z_1^3. *Ответ:* $8e^{-3i}$

Вопросы для повторения.

1) Дайте определение комплексного числа.
2) Какие числа называются комплексно-сопряженными?
3) Какие комплексные числа называются равными?
4) Что называется модулем комплексного числа?
5) Как складываются, вычитаются, умножаются и делятся комплексные числа в алгебраической форме?
6) Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
7) Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в алгебраической форме к его тригонометрической форме и обратно?
8) Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
9) Как возводится в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме?
10) По какой формуле извлекается корень n-й степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме?
11) Как записывается комплексное число в показательной форме?
12) Как осуществляется переход от записи комплексного числа, заданного в алгебраической форме к его показательной форме и обратно?
13) Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в показательной форме?
14) Как возводится в степень комплексное число, заданное в показательной форме?
15) По какой формуле извлекается корень n-й степени из комплексного числа, заданного в показательной форме?

Упражнения.

1. Выполнить действия:

1) $(3+i)+(-3-8i)$ *Ответ:* $-7i$

2) $(5-4i) + (7+4i)$ *Ответ:* 12

3) $(-6+2i) + (-6-2i)$ *Ответ:* -12

4) $(0{,}2+0{,}1i)+(0{,}8-1{,}1i)$ *Ответ:* $1-i$

5) $(2-3i) + (5+6i) + (-3-4i)$ *Ответ:* $4-i$

6) $(7+i)-(9+2i)$ *Ответ:* $-2-i$

7) $(-2-5i)-(2+5i)$ *Ответ:* $-4-10i$

8) $(1-i)-(7-3i)-(2+i) + (6-2i)$ *Ответ:* $-2-i$

2. Выполнить действия:

1) $(5-3i)2i$ *Ответ:* $6+10i$

2) $(3+4i)(3-4i)$ *Ответ:* 25

3) $(5+3i)(2-5i)$ *Ответ:* $25-19i$

4) $(-2-i)(1+i)$ *Ответ:* $-1-3i$

5) $(0{,}2-0{,}3i)(0{,}5+0{,}4i)$ *Ответ:* $0{,}22-0{,}07i$

3. Выполнить действия:

1) $\frac{1-i}{1+i}$ *Ответ:* $-i$

2) $\frac{3-2i}{1+3i}$ *Ответ:* $-0{,}3-1{,}1i$

3) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$ *Ответ:* $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i$

4) $\frac{(1-2i)\cdot(2+i)}{3-2i}$ *Ответ:* $\frac{18}{13}-\frac{1}{13}i$

5) $\frac{2+3i}{(4+i)\cdot(2-2i)}$ *Ответ:* $\frac{1}{68}+\frac{21}{68}i$

6) $\frac{(3+2i)\cdot(2-i)}{(2+3i)\cdot(1+i)}$ *Ответ:* $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$

4. Выполнить действия:

1) $(1-i)^3$ *Ответ: –2–2i*

2) $i^{40}-i^{21}$ *Ответ: 1–i*

3) i^3-i^{100} *Ответ: –1–i*

4) $i^{12}+i\cdot(1-i)$ *Ответ: 2+i*

5) $i^5\cdot(1-i^3)$ *Ответ: –1+i*

6) $i\cdot(1-i^{23})$ *Ответ: –1+i*

7) $\dfrac{i^3+i^{16}}{2+i^{27}}$ *Ответ: 0,6–0,2i*

8) $\dfrac{i^8-3\cdot i^{11}}{1+2\cdot i^{19}}$ *Ответ:–1+i*

5. Найти действительные числа X и У из условия равенства двух комплексных чисел:

1) $4\cdot x+5\cdot y-9+7\cdot(3\cdot x-y)\cdot i=10\cdot x+14\cdot y\cdot i$ *Ответ: (–9; –9)*

2) $3+4\cdot i\cdot x+5\cdot y\cdot i=12\cdot i+5\cdot x-2\cdot y$ *Ответ:* $\left(\dfrac{2}{11};\dfrac{16}{11}\right)$

3) $(2+i)\cdot x-(1-i)\cdot y=1+3\cdot i$ *Ответ:* $\left(1\dfrac{1}{3};1\dfrac{2}{3}\right)$

4) $x^2-5\cdot(x-1)+4\cdot i=y\cdot i-1$ *Ответ: (1;4); (4;4)*

6. Решить уравнение:

1) $x^2-6\cdot x+18=0$ *Ответ:* $3\pm 3i$

2) $x^2+4\cdot x+5=0$ *Ответ:* $-2\pm i$

3) $5\cdot x^2-4\cdot x+1=0$ *Ответ:* $0{,}4\pm 0{,}2i$

4) $x^2+9=0$ *Ответ:* $\pm 3i$

5) $x^2-6\cdot x+25=0$ *Ответ:* $3\pm 4i$

6) $x^2+10x+41=0$ *Ответ:* $-5\pm 4i$

7. Составить квадратное уравнение по его корням:

1) $x_1 = \dfrac{1-3\cdot i}{2}$; $x_2 = \dfrac{1+3\cdot i}{2}$ *Ответ:* $2x^2 - 2x + 5 = 0$

2) $x_1 = -3 + 2\cdot i$; $x_2 = -3 - 2\cdot i$ *Ответ:* $x^2 + 6x + 13 = 0$

3) $x_1 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3\cdot i}{5}$; $x_2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3\cdot i}{5}$ *Ответ:* $25x^2 - 20x + 13 = 0$

4) $x_1 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{7\cdot i}{4}$; $x_2 = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{7\cdot i}{4}$ *Ответ:* $8x^2 - 12x + 29 = 0$

8. Найти модуль чисел:

1) $1+i$ *Ответ:* $\sqrt{2}$

2) $1-i$ *Ответ:* $\sqrt{2}$

3) $-1+i$ *Ответ:* $\sqrt{2}$

4) $-1-i$ *Ответ:* $\sqrt{2}$

5) $\sqrt{3}+i$ *Ответ:* *2*

6) $5+2\cdot i$ *Ответ:* $\sqrt{29}$

7) $-2\cdot i$ *Ответ:* *2*

8) $3-3\cdot i$ *Ответ:* $3\sqrt{2}$

9. Представить в тригонометрической форме числа:

1) $1-i$ *Ответ:* $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

2) $-2\cdot i$ *Ответ:* $2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$

3) -3 *Ответ:* $3(\cos\pi + i\sin\pi)$

4) $\sqrt{3}-i$ *Ответ:* $2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

5) $1-i\cdot\sqrt{3}$ *Ответ:* $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

6) $-2-2\cdot i$ *Ответ:* $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

7) $1+i$ *Ответ:* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

8) $\frac{1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}$ *Ответ:* $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

10. Записать числа в алгебраической форме:

1) $2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ *Ответ:* $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

2) $5\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$ *Ответ: –5*

3) $0.5\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$ *Ответ: 0,5i*

4) $6\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ *Ответ:* $3\sqrt{2}-3i\sqrt{2}$

5) $4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ *Ответ:* $-2+2i\sqrt{3}$

6) $3\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ *Ответ:* $-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

11. Выполнить действия:

1) $0.5\cdot\left(\cos 215^0+i\cdot\sin 215^0\right)\cdot 4\cdot(\cos 208^0+i\cdot\sin 208^0)$

Ответ: $2\cdot\left(\cos 63^0+i\cdot\sin 63^0\right)$

2) $2\cdot\left(\cos 198^0+i\cdot\sin 198^0\right)\cdot 0.8\cdot(\cos 300^0+i\cdot\sin 300^0)$

Ответ: $1{,}6\cdot\left(\cos 138^0+i\cdot\sin 138^0\right)$

3) $0.3\cdot\left(\cos 118^0+i\cdot\sin 118^0\right)\cdot 15\cdot(\cos 282^0+i\cdot\sin 282^0)$

Ответ: $4{,}5\cdot\left(\cos 40^0+i\cdot\sin 40^0\right)$

4) $2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{10}\right)\cdot 0.5\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

Ответ: $\left(\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$

12. Выполнить действия:

1) $\frac{4\cdot(\cos 208^0+i\cdot\sin 208^0)}{16\cdot(\cos 100^0+i\cdot\sin 100^0)}$

Ответ: $0{,}25\cdot\left(\cos 108^0+i\cdot\sin 108^0\right)$

2) $\frac{18\cdot(\cos 72^0+i\cdot\sin 72^0)}{48\cdot(\cos 203^0+i\cdot\sin 203^0)}$

Ответ: $\frac{3}{8}\cdot\left(\cos 229^0+i\cdot\sin 229^0\right)$

3) $\frac{25\cdot(\cos\frac{7\pi}{15}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{15})}{40\cdot(\cos\frac{2\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{5})}$

Ответ: $\frac{5}{8}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\cdot\sin\frac{\pi}{15}\right)$

4) $\frac{35\cdot(\cos\frac{4\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{5})}{15\cdot(\cos\frac{7\pi}{20}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{20})}$

Ответ: $\frac{7}{3}\cdot\left(\cos\frac{9\pi}{20}+i\cdot\sin\frac{9\pi}{20}\right)$

13. Возвести в степень:

1) $(2\cdot(\cos 138^0+i\cdot\sin 138^0)^4)$

Ответ: $16\cdot\left(\cos 192^0+i\cdot\sin 192^0\right)$

2) $(\cos\frac{3\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{8})^{16}$

Ответ: $\left(\cos 0+i\cdot\sin 0\right)$

3) $0.1\cdot(\cos\frac{3\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{5})^5$

Ответ: $0{,}1\cdot\left(\cos\pi+i\cdot\sin\pi\right)$

4) $(\cos\frac{9\pi}{20}+i\cdot\sin\frac{9\pi}{20})^{40}$

Ответ: $\left(\cos 0+i\cdot\sin 0\right)$

14. Записать число в алгебраической форме:

1) $4e^{\frac{7\pi}{4}i}$ *Ответ:* $-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$

2) $10e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ *Ответ:* $-5-5i\sqrt{3}$

3) $0{,}4e^{\pi i}$ *Ответ:* $-0{,}4$

4) $0{,}32e^{\frac{\pi}{2}i}$ *Ответ:* $0{,}32i$

15. Выполнить действия:

1) $0{,}5e^{\frac{4\pi}{5}i}\cdot 4e^{\frac{\pi}{15}i}$ *Ответ:* $2e^{\frac{13\pi}{15}i}$

2) $0{,}2e^{\frac{7\pi}{10}i}\div 4e^{\frac{4\pi}{5}i}$ *Ответ:* $0{,}05e^{-\frac{\pi}{10}i}$

3) $(\ 2e^{\frac{2\pi}{3}i}\ )^6$ *Ответ:* $32e^{i\cdot 0}$

4) $\sqrt[3]{0{,}001e^{\frac{\pi}{6}i}}$ *Ответ:* $0{,}1e^{\frac{\pi}{18}i}$; $0{,}1e^{\frac{13\pi}{18}i}$; $0{,}1e^{\frac{25\pi}{18}i}$

5) $\sqrt[4]{81e^{\frac{4\pi}{3}i}}$ *Ответ:* $3e^{\frac{\pi}{3}i}$; $3e^{\frac{5\pi}{6}i}$; $3e^{\frac{4\pi}{3}i}$; $3e^{\frac{11\pi}{6}i}$

16. Выполнить действия и результат записать в тригонометрической форме:

1) $\dfrac{\sqrt{3}-i^{17}}{i^{12}}$ *Ответ:* $2\cdot\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\cdot\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

2) $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^9}$ *Ответ:* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

3) $\dfrac{2i^5}{1+i^{11}}$ *Ответ:* $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

4) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ *Ответ:* $\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

5) $\dfrac{(i-1)^3}{i^{12}+i^{31}}$ *Ответ:* $2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

6) $\dfrac{3i^{15}+\left(i\sqrt{3}\right)^2}{i^9}$ *Ответ:* $3\sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

7) $\dfrac{3i+3}{2i^{10}}$ *Ответ:* $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

8) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{i^{44}}$ *Ответ:* $\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

17. Выполнить действия и результат записать в показательной форме:

1) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}}$ *Ответ:* $e^{\frac{5\pi}{12}i}$

2) $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{3}i}}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^5}$ *Ответ:* $\dfrac{1}{32}e^{-\frac{\pi}{2}i}$

3) $\dfrac{\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{12e^{-i\frac{\pi}{2}}}$ *Ответ:* $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$

4) $\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot i}{(-1+i)^3}$ *Ответ:* $\dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$

5) $\left(\dfrac{\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}{-1+i}\right)^{10}$ *Ответ:* $e^{i\cdot 0}$

6) $\dfrac{(1+i)^{15}}{2^7\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}$ *Ответ:* $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}$

18. Решить уравнения:

1) $z^5 = 243e^{\frac{\pi}{3}i}$ *Ответ:* $3e^{\frac{\pi}{15}i}$; $3e^{\frac{7\pi}{15}i}$; $3e^{\frac{13\pi}{15}i}$; $3e^{\frac{19\pi}{15}i}$; $3e^{\frac{5\pi}{3}i}$

2) $z^3 = 0{,}008e^{\frac{11\pi}{6}i}$ *Ответ:* $0{,}2e^{\frac{11\pi}{18}i}$; $0{,}2e^{\frac{23\pi}{18}i}$; $0{,}2e^{\frac{35\pi}{18}i}$

3) $z^4 = 625e^{\frac{5\pi}{4}}$ *Ответ:* $5e^{\frac{5\pi}{16}i}$; $5e^{\frac{13\pi}{16}i}$; $5e^{\frac{21\pi}{16}i}$; $5e^{\frac{29\pi}{16}i}$

19. Вычислить:

1) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{12}$ *Ответ: 1*

2) $\left(\dfrac{2i^9}{1+i^{15}}\right)^{10}$ *Ответ: 32i*

Зачетная работа №1.

1) Решить уравнение: $8x^2 - 12x + 5 = 0$.

2) Найти модуль числа: $Z = -8 - 2i$.

3) Построить и вычислить сумму и разность чисел Z_1 и Z_2, если $Z_1 = 9 - 6i$; $Z_2 = -4 + 2i$.

4) Выполнить действия : а) $Z_1 \cdot Z_2$; б) $\frac{Z_1}{Z_2}$, если $Z_1 = 5 + 6i$ и $Z_2 = -3 - 2i$.

5) Выполнить действия: $\frac{3i^{24} - 5i^{11}}{2i^{40} + i^{23}}$.

6) Найти действительные числа x и y из равенства двух комплексных чисел $(3+i)x - 2(1+4i)y = -2 - 4i$.

7) Составить квадратное уравнение по его корням $x_1 = -0{,}6 - 0{,}4i; x_2 = -0{,}6 + 0{,}4i$.

Зачетная работа №2.

1) Записать число $Z = -3 + 3i$ в тригонометрической форме.

2) Записать число $Z = 2e^{-\frac{5\pi}{6}}$ в алгебраической форме.

3) Выполнить действия: а) $0{,}02e^{\frac{13\pi}{20}i} \cdot 5e^{\frac{4\pi}{5}i}$;

б) $\frac{36\left(\cos 185^0 + i\sin 185^0\right)}{108\left(\cos 215^0 + i\sin 215^0\right)}$;

в) $\left(0{,}1e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^4$.

4) Решить уравнение: $Z^5 = 32e^{\frac{\pi}{2}i}$.

5) Вычислить: $\left(\frac{5 - i^7}{2 - 3i^{19}}\right)^8$.