**Государственное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
«Котовский индустриальный техникум»**

МАТЕМАТИКА

Модуль по теме:
«Функции, пределы и непрерывность»

**Котовск
2013**

Учебное пособие для студентов техникума I и II курсов

Авторы:
Букатина Т.А.- преподаватель математики.

Модуль содержит теоретический материал, необходимый при изучении темы: «Функции, пределы и непрерывность». В конце изложения теории приводятся примеры решения типовых задач по данной теме. Модуль завершается блоком заданий для самостоятельной работы и зачетными работами.

Модуль составлен в соответствии с программой по математике, рекомендованной Министерством образования и науки РФ для средних специальных учебных заведений.

Данный модуль может быть использован на учебных занятиях и для самостоятельной подготовки студентов всех специальностей.

Функции, пределы и непрерывность

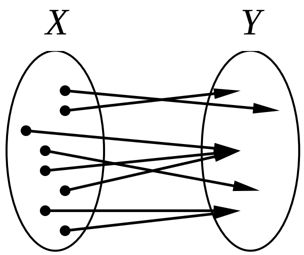
§1. Функция. Основные понятия.

1. Определение функции. Понятие функции, известное нам из курсов математики и физики средней школы, представляют собой одно из основных математических понятий, при помощи которых моделируются многие естественные процессы и явления. Например, с процессом расширения при нагревании металлического стержня связаны две величины: температура среды - переменная величина, которая независимо меняется в некоторых пределах, и длина стержня, которая зависит от температуры. Для характеризации данного процесса необходимо указать, какие значения длины стержня соответствуют различным значениям температуры. В таком случае говорят, что длина стержня является функцией от температуры. Рассмотрим еще один пример. Если при постоянной температуре изменить объем, занимаемый газом, то давление газа на стенки сосуда тоже будет меняться. Следовательно, при постоянной температуре давление газа является функцией от объема. Если же менять и температуру то давление будет зависеть, или, как говорят, будет функцией, от двух переменных - объема и температуры. В настоящей и последующей главах мы будем изучать функции одной переменной, функции многих переменных будут встречаться только эпизодически.

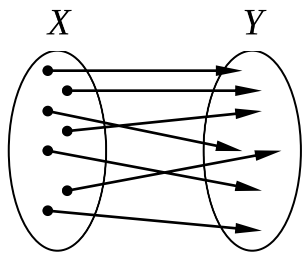
Пусть даны два непустых множества X и Y.

Определение №1. Соответствие, которое каждому элементу x из X сопоставляет один и только один элемент y из Y, называется *функцией, определенной на множестве X со значениями в Y*.

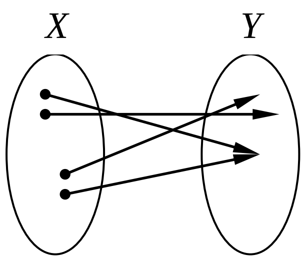
Например, соответствие, изображенное на *рис. а*, является функцией (соответствие однозначное); соответствие, изображенное на *рис. б*, также является функцией (соответствие взаимно однозначное); соответствие, изображенное на *рис. в*, не является функцией, так как не каждому элементу множества X соответствует элемент из Y (это соответствие можно рассмотреть как функцию, но определенную не на X, а на некоторой его части); соответствие, определенное на *рис. г*, не является функцией (не соблюдается условие однозначности, элементу x_0 соответствует два элемента из Y).



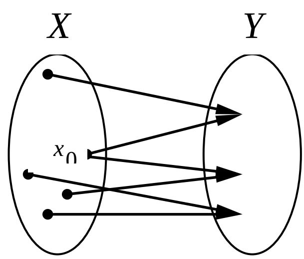
а



б



в



г

Для обозначения функций используются буквы f, g, h и др. Так, если функция f сопоставляет элементу x из X элемент y из Y, то будем писать $y=f(x)$.

Определение №2. Множество X называется *областью определения* (или *существования*) функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех y из Y, для которых существует хоть один x из X такой, что $y=f(x)$, называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

Если $y=f(x)$, то элемент y, вообще говоря, зависит от элемента x, который может быть любым из области определения $D(f)$.

Определение №3. Элемент x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а y - *функцией* или *зависимой переменной* (от x).

Определение №4. Функция $f(x)$ называется числовой функцией, если ее область определения $D(f)$ и множество значений $E(f)$ содержатся в множестве действительных чисел **R**.

2. График функции.

Определение №5. *Графиком* числовой функции $y=f(x)$ называется множество всех точек (x; y) плоскости Oxy, координаты которых приводятся в соответствие данной функцией $y=f(x)$, т.е. это множество точек (x; $f(x)$).

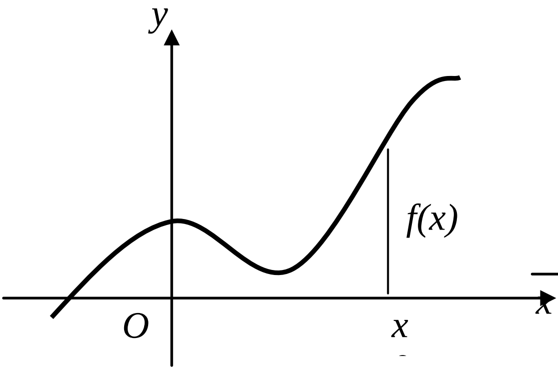


рис. 1

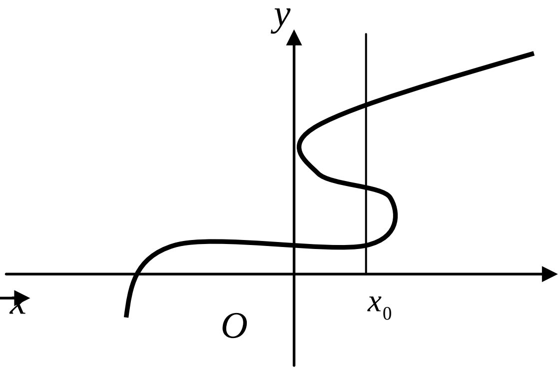


рис. 2

Как правило, графиком функции служит некоторая линия. Так, линия, изображенная на *рис.1*, может быть графиком некоторой функции. Линия же, изображенная на *рис.2* не может быть графиком функции, потому что не соблюдается условие однозначности: значению аргумента x_0 соответствует несколько значений *y*.

3. Способы задания функций. Функции могут быть заданы различными способами:

а) *Аналитический способ*. В этом случае функция задается при помощи некоторой одной или несколькими формулами.

<u>Например:</u>

$y = x^2 + 3x - 5$; $f(x) = 2^x + 1$; $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ если } x < 0 \\ 5x + 3, \text{ если } x \le 0 \end{cases};$$

$$f(x)=\begin{cases}2x, \text{ если } x\le -1\\ x^2, \text{ если } 1<x\le 5\\ 4, \text{ если } x>5\end{cases}.$$

Отметим, что под функцией, заданной некоторой формулой, понимается функция, определенная на множестве всех значений аргумента *x*, для которых указанная формула имеет смысл.

б) *Графический способ.* В этом случае соответствие между значениями аргумента *x* и функции *y* устанавливается с помощью заданного графика, по которому для каждого значения аргумента *x* определяется значение функции *y*.

в) *Алгоритмический* или *машинный способ*. В этом случае дается алгоритм или программа, по которым для каждого значения *x* вычисляется значение функции *y=f(x)*.

г) *Табличный способ*. В этом случае функция задается таблицей некоторых значений аргумента и соответствующих значений функции. Так, хорошо известны таблицы значений функций: $y=x^2$ (квадратов), $y=1/x$ (обратных чисел), $y=\lg x$ (логарифмов), тригонометрических функций и др.

Упражнения:

1.1. Дана функция $f(x)=x^2+1$. Вычислить значения:

1) $f(4)$ 2) $f(\sqrt{2})$ 3) $f(0)$ 4) $f(-1)$.

1.2. Дана функция $f(x)=\begin{cases}5x-7, \text{ если } x<-1\\ x^2+1, \text{ если } x\ge -1\end{cases}$. Вычислить значения:

1) $f(-2)$ 2) $f(0)$ 3) $f(-1)$ 4) $f(5)$.

1.3. Найти область определения функции:

1) $f(x) = 4x^2 - 5x + 6$;

2) $f(x) = \dfrac{3x+4}{x-1}$;

3) $f(x) = \sqrt{8-4x}$;

4) $f(x) = \ln(x+5)$.

§2. Предел функции

2.1. Пусть дана функция $y = x^2 - 4$ *(1)*.

О пределе функции можно говорить только при условии задания предела, к которому стремится ее аргумент x, без этого условия вопрос о пределе функции не имеет смысла.

Положим, что $x \to 3$ посмотрим, существует ли при этом условии предел данной функции и если существует, то какой.

Пусть в нашем примере x принимает такую последовательность значений:

$$3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001;\ 3{,}0001;\ \ldots \to 3;$$

тогда функция *(1)* получит соответственно значения:

$$5{,}6;\ 5{,}06;\ 5{,}006;\ 5{,}0006;\ \ldots \to 5.$$

Мы видим, что данная последовательность значений функции имеет предел, равный *5*.

Если в равенстве *(1)* аргументу дать значения:

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \to 3,$$

то и в этом случае предел последовательности значений функции будет тот же, в чем легко убедиться соответствующими вычислениями.

Итак, функция *(1)* имеет предел при $x \to 3$,равный 5.

Это записывается так:

$$\lim_{x \to 3}(x^2 - 4) = 5\,.$$

Показанный выше способ нахождения предела функции громоздок, поэтому на практике он не применяется.

<u>Определение предела функции.</u>

Пределом функции $y = f(x)$ *при* x *стремящемся к* a называется число b, к которому стремится значение самой функции при $x \to a$ и обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

<u>Теорема о единственности предела.</u>

Если функция $f(x)$ имеет при x, стремящемся к a, то этот предел *единственный*.

2.2. Основные теоремы о пределах функций.

Приводим без доказательства следующие теоремы о пределах функций:

<u>Теорема №1.</u>

Если существуют пределы функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то существует так же и предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$:

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)\,.$$

<u>Теорема №2.</u>

Если существуют пределы функции $f(x)$ и $g(x)$ при

$x \to a$, то существует так же и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$:

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема №3.

Если существуют пределы функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ и предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует так же и предел отношения (дроби), равный отношению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Следствия:

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim\limits_{x \to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

3. $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

4. Если *n*- натуральное число, то $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Пример:

Вычислить $\lim\limits_{x \to 2}\left(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7\right)$. Используя теорему №1 и следствия, получим:

$$\lim_{x \to 2}\left(5x^3 + 2x^2 - 3x + 7\right) = \lim_{x \to 2} 5x^3 + \lim_{x \to 2} 2x^2 - \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 7 =$$

$$5\lim_{x \to 2} x^3 + 2\lim_{x \to 2} x^2 - 3\lim_{x \to 2} x + 7 = = 5 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 49$$

Таким образом, для вычисления предела функции $f(x)$ при $x \to a$, достаточно вместо переменной x подставить значение a, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x^2-6x+9\right)=3\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)+9=12+12+9=30$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}=\dfrac{2^2-2+1}{2-3}=\dfrac{4-2+1}{-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x+5}=\dfrac{1-1}{3\cdot 1+5}=\dfrac{0}{8}=0$.
4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x+9}{x^2-5}=\dfrac{4\cdot 5+9}{5^2-5}=\dfrac{29}{20}=1{,}45$.

2.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение№1.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Определение№2.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Отметим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, то их сумма $f(x)+g(x)$ при $x \to a$ также является бесконечно малой.
2. Если функция $f(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$,

а $F(x)$ - ограниченная функция, то их произведение $f(x)\cdot F(x)$, есть бесконечно малая величина.

Следствие. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.

3. Если функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, функция $g(x)$- бесконечно большая, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\infty$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

4. Если функция $f(x)$ - бесконечно малая при $x\to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая, т.е. $\dfrac{1}{0}=\infty$.

5. Если функция $f(x)$ - бесконечно большая при $x\to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая, т.е. $\dfrac{1}{\infty}=0$.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8x+1}{x-4}=\dfrac{8\cdot 4+1}{4-4}=\dfrac{33}{0}=33\cdot\dfrac{1}{0}=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\dfrac{3\cdot 0^2-2\cdot 0}{2\cdot 0^2-5\cdot 0}=\dfrac{0}{0}$.

Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны 0. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить предел нельзя, так как при $x\to 0$ получается отношение двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю, и, следовательно, сделать возможным применение *теоремы №3*. Нужно иметь в виду, что здесь не производится сокращения на нуль, что недопустимо. По определению предела функции аргумент x стремиться к своему предельному значению, никогда не принимая этого значения. Поэтому до перехода к пределу можно произвести сокращение на множитель, стремящийся к нулю. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left[\frac{0}{0}-\text{неопределенность}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(3x-2)}{x\cdot(2x-5)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\frac{2}{5}.$$

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют *неопределенностями*; к ним относятся неопределенности видов: $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $[\infty-\infty]$; $\left[0^0\right]$; $\left[\infty^0\right]$; $[0\cdot\infty]$. Устранить неопределенность удается часто с помощью алгебраических преобразований.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\dfrac{3^2-5\cdot 3+6}{3\cdot 3^2-9\cdot 3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$;

Разложим в числителе квадратный трехчлен на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлена, а в знаменателе вынесем общий множитель за скобки, а затем сократим дробь на $(x-3)$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-4}=\dfrac{4\cdot 2^2-7\cdot 2-2}{2^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{4x+1}{(x+2)}=\frac{4\cdot 2+1}{2+2}=$$

$$=\frac{9}{4}=2{,}25$$

Ответ: $2{,}25$.

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}=\dfrac{3\cdot 5^2-17\cdot 5+10}{3\cdot 5^2-16\cdot 5+5}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$\lim_{x\to 5}\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-5)}{3(x-5)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3x-2}{3x-1}==\frac{3\cdot 5-2}{3\cdot 5-1}=\frac{13}{14}$$

Ответ: $\dfrac{13}{14}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\dfrac{0}{\sqrt{5-0}-\sqrt{5+0}}=\dfrac{0}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

умножим числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$, а затем выполнив алгебраические преобразования, сократим дробь на x.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(\sqrt{5-x})^2-(\sqrt{5+x})^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(5-x)-(5+x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{5-x-5-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2}=\frac{\sqrt{5-0}+\sqrt{5+0}}{-2}=-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}==-\frac{2\sqrt{5}}{2}=$$

$$=-\sqrt{5}$$

Ответ: $-\sqrt{5}$.

5. $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\frac{\sqrt{4+5}-3}{4-4}=\frac{\sqrt{9}-3}{0}=\frac{3-3}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}==\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5})^2-3^2}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4+5}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

6. $$\lim_{x\to 2}=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\frac{1}{2-2}-\frac{4}{2^2-4}=\frac{1}{0}-\frac{4}{0}=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1\cdot(x+2)}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Рассмотрим примеры предела функции при $x \to \infty$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{5x-1}$

При $x \to \infty$ числитель и знаменатель - величины бесконечно большие. Поэтому при непосредственном применении *теоремы №3* получим $\dfrac{\infty}{\infty}$, которое представляет собой неопределенность. Для вычисления предела этой функции нужно числитель и знаменатель разделить на x или x вынести за скобки.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{5-\frac{1}{x}} = \frac{2+\frac{3}{\infty}}{5-\frac{1}{\infty}} = \frac{2+0}{5-0} = \frac{2}{5}$$

Ответ: $\dfrac{2}{5}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+4}{5x-6x^3+3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

Разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{5x}{x^3}-\frac{6x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2}-6+\frac{3}{x^3}} = \frac{1-\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{5}{\infty}-6+\frac{3}{\infty}} = \frac{1-0+0}{0-6+0} =$$

$$-\frac{1}{6}$$

Ответ: $-\dfrac{1}{6}$.

Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $[\infty-\infty]$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$

При $x\to\infty$ функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин $[\infty-\infty]$. Умножим и разделим функцию на одно и тоже (сопряженное) выражение $x+\sqrt{x^2-4x}$ и выполним преобразования, приводящие к формулам сокращенного умножения (разности квадратов).

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-4x})(x+\sqrt{x^2-4x})}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(\sqrt{x^2-4x})^2}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-4x)}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x})}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=$$

$$=\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{\infty}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{4}{1+1}=2$$

Ответ: 2.

<u>Упражнения.</u>

<u>Вычислить пределы:</u>

2.1. 1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$.

Ответы: 1) 25; 2) -1.

2.2. 1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^6-5x^2+x-4)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2+x^2-8x+10)$.

Ответы: 1) -12; 2) 10.

2.3. 1) $\lim\limits_{x\to 1}((7x+2)\cdot(4x-3)\cdot(5x+1))$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}((x^2-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5))$.

Ответы: 1) 54; 2) 9.

2.4. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)\cdot(x-2)}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

Ответы: 1) -6; 2) 3.

2.5. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$.

Ответы: 1) ∞; 2) ∞.

2.6. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{x}$.

Ответы: 1) $0{,}5$; 2) 1.

2.7. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{6}$; 2) -4.

2.8. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

Ответы: 1) $0{,}2$; 2) 3.

2.9. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-11x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$.

Ответы: 1) $\frac{2}{3}$; 2) 3.

2.10. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{3x^2+5x+2}{3x^2+8x+4}$.

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{1}{4}$.

2.11. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Ответы: 1) 6; 2) $\frac{1}{4}$.

2.12. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{11}{x-3}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}\right)$.

Ответы: 1) $-\frac{1}{6}$; 2) 1.

2.13. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$.

Ответы: 1) 0; 2) 5.

2.14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$.

Ответы: 1) 2; 2) 3; 3) 3.

2.15. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-8}{2x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$.

Ответы: 1) $0{,}5$; 2) ∞; 3) 4.

2.16. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+2x^2-1}{x^4-2x^3}$.

Ответы: 1) ∞; 2) 0.

2.17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$.

Ответы: 1) $-0{,}5$; 2) $2{,}5$.

2.18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+10}-\sqrt{x+20}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2-2x}\right)$.

Ответы: 1) ∞; 2) $\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$.

2.19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{3x^2}{3x^2+7}\right)$.

Ответы: 1) -9; 2) 0.

2.20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{2x^2-x}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2-2}-\dfrac{x^4}{x^2+2}\right)$.

Ответы: 1) $0{,}5$; 2) 4.

§3. «Замечательные пределы»

3.1. Вычисление пределов тригонометрических функций.

При вычислении пределов тригонометрических функций часто используется предел отношения синуса дуги к самой дуге:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ или $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ - «первый замечательный предел». *(1)*

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}=\dfrac{\sin 0}{0}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

Чтобы применить формулу *(1)*, надо числитель и знаменатель умножить на 4, а затем постоянный множитель вынести за знак предела и применить первый замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin 4x}{4\cdot 3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{\cos 0}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

Ответ: 1.

3)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5\cdot 4x\cdot x}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x\cdot x}=\frac{5}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{0}=\frac{5}{4}\cdot\infty=\infty$$

Ответ: ∞.

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin 7x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{3x}-\frac{\sin 7x}{3x})=$

$$\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}==\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2x}-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{7\cdot\sin 7x}{7x}=$$

$$\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{1}{3}\cdot 7\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\quad\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{7}{3}\cdot 1=-\frac{5}{3}$$

Ответ: $-\frac{5}{3}$.

<u>Упражнения.</u>

<u>Вычислить пределы:</u>

3.1. 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$; 3) $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 5x}$.

Ответы: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 3.

3.2. 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 3x}{x}$; 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot ctgx$.

Ответы: 1) 5; 2) 0; 3) 1.

3.3. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{tgx}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{5\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$.

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 4.

3.4. 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x^3}{\sin^3 2x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 6x}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg^3 4x}{10x^3}$.

Ответы: 1) $0{,}75$; 2) 0; 3) $6{,}4$.

3.2. «Второй замечательный предел».

К пределам следующего типа относятся примеры с неопределенностью вида $\left[1^\infty\right]$. В этом случае выражение, стоящее под знаком предела представляет собой степенно-показательную функцию, в основании которой необходимо выделить целую часть дроби (которая должна быть равна 1). Неопределенность $\left[1^\infty\right]$ устранятся при помощи выделения «второго замечательного предела»:

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, где e - иррациональное число ($e \approx 2{,}718...$).

<u>Вычислить пределы:</u>

1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}\cdot x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{3}{x}}\right)^{3}=e^{3}$$

Ответ: e^3.

2)

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2x\cdot\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{2x\cdot\frac{5}{x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{10}=e^{10}$$

Ответ: e^{10}.

3)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+(-\frac{4}{3x})\right)^{-\frac{3x}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3x}\right)\cdot x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{-\frac{3x}{4}}\right)^{-\frac{4}{3x}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{3x}\right)^{-\frac{3x}{4}}\right)^{-\frac{3}{4}}=e^{-\frac{3}{4}}$$

Ответ: $e^{-\frac{3}{4}}$.

4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+2}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right)^{x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}\cdot\frac{2}{x+1}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}}}=e^{\frac{2}{1+0}}=e^{2}$$

Ответ: e^2.

<u>Упражнения.</u>

<u>Вычислить пределы:</u>

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{4x}\right)^{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+0,5}$.

Ответы: 1) $e^{\frac{2}{3}}$; 2) $e^{-\frac{5}{4}}$; 3) $e^{\frac{12}{5}}$; 4) $e^{-\frac{1}{2}}$; 5) $\frac{1}{e}$; 6) e.

§4. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $g'(x)\neq 0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, т.е. частное в точке $x=x_0$

представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, при условии, что существует предел отношения производных.

Если частное $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *в точке* $x=x_0$ *также есть неопределенность вида* $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$ *и производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т.д.*

Правило Лопиталя можно применять также и для раскрытия неопределенностей вида: $[\infty-\infty]$; $[0^0]$; $[\infty^0]$; $[0\cdot\infty]$; $[1^\infty]$.

В случае неопределенности вида $[0\cdot\infty]$ или $[\infty-\infty]$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и далее использовать правило Лопиталя.

В случае неопределенности вида $[0^0]$ или $[\infty^0]$, или $[1^\infty]$ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел её логарифма.

1. *Найти:* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Решение: Числитель и знаменатель стремится к нулю при $x\to 1$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\frac{1^2-1+\ln 1}{e^1-e}=\frac{1-1+0}{e-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'_x}{(e^x-e)'_x}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-0+\frac{1}{x}}{e^x-0}=\frac{2\cdot 1+\frac{1}{1}}{e^1}=\frac{3}{e}$$

Ответ: $\frac{3}{e}$.

2. *Найти:* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0-\sin 0}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'_x}{(x^3)'_x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$

$$\frac{1-\cos 0}{3\cdot 0^2}=\frac{1-1}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'_x}{(3x^2)'_x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

(т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ - первый замечательный предел)

Ответ: $\frac{1}{6}$.

3. *Найти:* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3)'_x}{(e^x)'_x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2)'_x}{(e^x)'_x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=$$

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x)'_x}{(e^x)'_x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=\frac{6}{\infty}=0$$

Ответ: 0.

4. *Найти:* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x\cdot e^{\frac{x}{2}})'_x}{(x+e^x)'_x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}+x\cdot e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{1+e^x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot(1+\frac{x}{2})}{1+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot(1+\frac{x}{2})+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\cdot(2+\frac{x}{2})}{e^x}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(2+\frac{x}{2})'_x}{(e^{\frac{x}{2}})'_x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}==\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\infty}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Ответ: 0.

5. *Найти:* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение: Это неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Для того чтобы найти предел функции, приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{e^0-1}=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=$$

$$\frac{e^0-1-0}{0\cdot(e^0-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'_x}{(x\left(e^x-1\right))'_x}==\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'_x}{(e^x-1+xe^x)'_x} = = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

6. *Найти:* $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)$.

Решение: Здесь мы имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Представим произведение в виде частного, а затем, получив неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right) = 0\cdot\ln 0 = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'_x}{(\frac{1}{x^2})'_x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}(-\frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Ответ: 0.

7. *Найти:* $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Решение: Это неопределенность вида $\left[0^0\right]$. Обозначим данную функцию через y, т.е. $y = (\sin x)^x$, и прологарифмируем её:

$$\ln y = x \cdot \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}$$

Вычисли предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя (здесь имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln \sin x)'_x}{(\frac{1}{x})'_x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$-\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x \to 0}(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x}) =$$

$$= -\lim_{x \to 0}(x \cdot \cos x) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot \cos 0 \cdot 1 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0,$$ следовательно $\lim\limits_{x \to 0} \ln y = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to 0} y = e^0 = 1$

Ответ: 1.

<u>Упражнения.</u>

<u>Вычислить пределы:</u>

1. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 + 3x^2 - 7x - 6}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - arctgx}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

Ответы: 1) $0{,}6$; 2) $\dfrac{19}{171}$; 3) 0; 4) $0{,}18$.

2. Неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\,\frac{\Pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Ответы: 1) 0; 2) 1; 3) ∞; 4) $\dfrac{1}{2}$.

3. Неопределенность вида $[0\cdot\infty]$.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(tgx\cdot\ln x)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot ctg\Pi t)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot ctgx$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\ln x)$.

Ответы: 1) 0; 2) $\dfrac{1}{\Pi}$; 3) 0; 4) 0.

4. Неопределенность вида $[\infty - \infty]$.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{5}{1-x^5}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x} - tgx\right)$.

Ответы: 1) $-0{,}5$; 2) $-1{,}5$; 3) 0; 4) 0.

5. Неопределенность вида $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{\sin 2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{2}}(\Pi - 2x)^{\cos x}$.

Ответы: 1) 1; 2) 1; 3) e^{-1}; 4) 1.

Зачетная работа №1

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{10+x}-3x}{x+6}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-7x}{2x+3}$;

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\Pi}{3}}\cos(\dfrac{\Pi}{2}-x)$;

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3-6x-7}{3x^2-4x^3+5}$;

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{2x+1}}{x-4}$.

Зачетная работа №2

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+5x-12}{3x^2+13x+4}$;

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^3-6x^2+5x+1}{4x^2+3x^3-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{3x^2-6x}-\sqrt{3x^2-x}\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{1}{2x}}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin^2 2x}{tgx\cdot\sin 3x}$;

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-1}\right)^{2x}$.

Зачетная работа №3

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-tgx}{1-\cos x}$;
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5^x}{x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{1-x^6}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot ctgx)$;
6. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

§5. Непрерывность функции и точки разрыва.

1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она удовлетворяет следующим условиям: *1)* определена в точке x_0; *2)* имеет конечный предел при $x\to x_0$; *3)* этот предел равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (1)$$

2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{x\to x_0}\Delta y=0. \qquad (2)$$

3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке, то их сумма, произведение и частное (при условии, что знаменатель отличен от нуля) являются функциями, непрерывными в этой точке.

4. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

5. Функция называется непрерывной на некотором промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

6. Если не выполнено определение непрерывности *(1)* или *(2)*, то функция в точке x_0 терпит разрыв, причем:

а) если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ бесконечен, то x_0 - точка *разрыва второго рода*;

б) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ конечны, но не равны между собой, то x_0 - точка *неустранимого разрыва первого рода*;

в) если оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ конечны, равны между собой, но не равны $f(x_0)$, то x_0 - точка *устранимого разрыва первого рода.*

Пример №1.

Исследовать на непрерывность функции $y=f(x)$ в точке $x=1$. В случае разрыва установить его характер в точке $x=1$:

а) $y(x)=\dfrac{(x-1)^3}{x-1}$; б) $y(x)=\dfrac{x}{x-1}$; в) $y(x)=x-1$; г) $y(x)=\begin{cases} x-1, x\ge 1, \\ x+1, x<1. \end{cases}$

Решение:

а) При $x=1$ функция не определена, следовательно, функция в точке $x=1$ терпит разрыв:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=\lim\limits_{x\to 1}(1-1)^2=0$, т.е. конечный предел существует; следовательно, $x=1$- точка устранимого разрыва первого рода. (Доопределив функцию в точке $x=1$, т.е. положив $f(1)=0$), получим, что новая функция

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^3}{x-1}, \text{при } x\ne 1, \\ 0, \qquad \text{при } x=1 \end{cases}$$

будет уже непрерывна в точке $x=1$.)

б) При $x=1$ функция не определена, следовательно, функция в точке $x=1$ терпит разрыв: $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{x-1}=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x-1}=-\infty$.

Так как односторонние пределы (достаточно было бы одного) бесконечны, то $x=1$ - точка разрыва функции второго рода.

в) При $x=1$ функция определена, $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0}(x-1)=0$, $y(1)=1-1=0$, т.е. $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} y(x)=y(1)=0$, следовательно, функция в точке $x=1$ непрерывна.

г) При $x=1$ функция определена, $y(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x+1)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0$, имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} y(x)\neq \lim\limits_{x\to 1+0} y(x)$, таким образом, в точке $x=1$ функция терпит неустранимый разрыв первого рода.

Пример №2.

Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ и указать характер разрыва.

Решение:

При $x=0$ функция не определена. Для установления характера разрыва в точке $x=0$ найдем односторонние пределы при $x\to 0-0$ и при $x\to 0+0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1+0}=1$ (так как при $x\to 0-0$ показатель степени $\dfrac{1}{x}\to -\infty$ и $e^{\frac{1}{x}}\to 0$); $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ (так как при $x\to 0+0$ показатель степени $\dfrac{1}{x}\to +\infty$, $e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$, а дробь $\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\to 0$).

Таким образом, в точке $x=0$ функция имеет неустранимый разрыв первого рода.

Упражнения.

Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва и указать характер разрыва:

5.1. $y(x)=\begin{cases} x-2, & \text{при } x<0, \\ 2, & \text{при } x=0, \\ x^2-2, & \text{при } x>0. \end{cases}$

Ответ: $x=0$ - разрыв I рода устранимый.

5.2. $y(x)=\begin{cases} x-2, & \text{при } x<0, \\ -2, & \text{при } x=0, \\ -x-2, & \text{при } x>0. \end{cases}$

Ответ: функция непрерывна.

5.3. $y(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2}$

Ответ: функция непрерывна.

5.4. $y(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

Ответ: $x=2$ - разрыв II рода.

5.5. $y(x)=\begin{cases} x-2, & \text{при } x<2, \\ x+2, & \text{при } x\geq 2. \end{cases}$

Ответ: $x=2$ - разрыв I рода устранимый.