Государственное образовательное учреждение
Среднего профессионального образования
«Котовский индустриальный техникум»

МАТЕМАТИКА
Модуль по теме: «Прямая на плоскости и ее уравнения»

Котовск, 2014 г.

Учебное пособие для студентов техникума II курса

Авторы:
Т.А. Букатина – преподаватель математики.

Модуль содержит теоретический материал, необходимый при изучении темы: «Прямая на плоскости и ее уравнения». В конце изложения теории приводятся примеры решения типовых задач по данной теме. Модуль завершается блоком заданий для самостоятельной работы, вопросами для повторения и зачетными заданиями.

Модуль составлен в соответствии с программой по математике, рекомендованной Министерством образования и науки РФ для средних специальных учебных заведений.

Данный модуль может быть использован на учебных занятиях и для самостоятельной подготовки студентов всех специальностей.

Прямая на плоскости и её уравнения

1. Уравнение линии на плоскости

Рассмотрим уравнение

$$F(x,y)=0, \qquad (1)$$

где x и y- произвольные переменные, принимающие действительные значения.

Известно, что решением уравнения (1) является любая упорядоченная пара значений переменных x и y, обращающая это уравнение в верное равенство. Заметим, что уравнению (1) может удовлетворять одна пара действительных чисел, несколько и даже бесконечное множество таких пар. Например, уравнению $(x-4)^2+(y-2)^2=0$ удовлетворяет единственная пара чисел $x=4$ и $y=2$. Уравнению $2x-3y+5=0$ удовлетворяет любая пара чисел $x=x_0$ и $y=(2x_0+5)/3$, где x_0- произвольное число. Существуют уравнения вида (1), которым не удовлетворяет ни одна пара действительных чисел. Такими, например, являются уравнения $x^2+y^2+1=0$, $\cos(2x+y)-5=0$.

Зададим на плоскости систему координат Oxy. Если рассматривать множество пар значений переменных x и y, удовлетворяющих уравнению (1), как координаты точек на плоскости, то множество этих точек представляет *график* уравнения (1), который, вообще говоря, есть некоторая *линия* L.

Таким образом, уравнению с переменными x и y соответствует на плоскости, вообще говоря, некоторая линия, координаты точек которой удовлетворяют данному уравнению. Построение графиков функций можно рассматривать как примеры нахождения линий, соответствующих данным уравнениям.

Не менее важной является обратная задача: по данной на плоскости линии найти соответствующее ей уравнение.

Пример №1:

Лежат ли точки $A(-2;1)$ и $B(0;1)$ на линии $3x - y + 7 = 0$?

Δ Подставив в данное уравнение вместо x и y координаты точки A, получим

$$3 \cdot (-2) - 1 + 7 = -7 + 7 = 0.$$

Следовательно, точка A лежит на данной линии. Подставим координаты точки B:

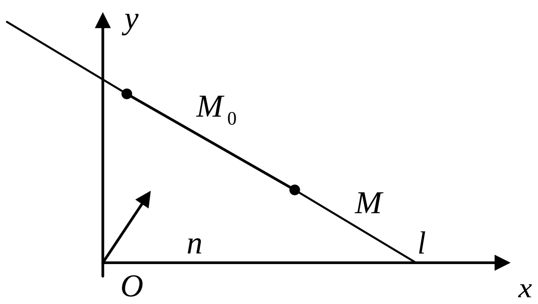
$$3 \cdot 0 - 1 + 7 = 6 \neq 0,$$

т.е. точка B не лежит на данной линии.

ч.т.д.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в плоскости Oxy заданы некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ и ненулевой вектор n с координатами $(A; B)$. Требуется составить уравнение прямой l, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной вектору n *(рис. 1)*.



(рис. 1)

Определение. Любой ненулевой вектор n, перпендикулярный прямой l, называется *нормальным вектором* этой прямой. $\bar{n} \perp l$; $\bar{n} = (A; B)$.

Очевидно, что через точку M в плоскости Oxy проходит единственная прямая l, имеющая нормальный вектор n. Возьмем на прямой l произвольную точку $M(x; y)$.

Тогда вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен вектору n и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$n \cdot \overline{M_0M} = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ и $n = (A; B)$, выразим равенство (1) в координатной форме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2)$$

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным

нормальным вектором

где $(A; B)$ - координаты нормального вектора

$(x; y)$ - текущие координаты

$(x_0; y_0)$ - координаты точки, через которую проходит прямая

Пример №1:

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;3)$ перпендикулярно вектору $n = (2;-3)$.

Δ Из условия задачи имеем

$$x_0 = -1, \quad y_0 = 3, \quad A = 2, \quad B = -3.$$

Подставив эти значения в уравнение (2), получим

$$2(x + 1) - 3(y - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y + 11 = 0.$$

ч.т.д.

Упражнения:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно вектору $n = 3i - 7j$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(-1;-2)$ перпендикулярно вектору $n = (0;-2)$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно к нему, если $A(3;-2)$ и $B(5;-4)$.

3. Общее уравнение прямой и неполные уравнения прямой

3.1 Общее уравнение прямой

Пусть дана произвольная прямая. Выберем на ней некоторую точку $M_0(x_0; y_0)$, и пусть $\bar{n} = (A; B)$- произвольный нормальный вектор этой прямой, тогда (из п.2) уравнением этой прямой будет уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Запишем его так: $Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$, $Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$; обозначив число- $(Ax_0 + By_0)$ C, получим $Ax + By + C = 0$.

$\boxed{Ax + By + C = 0}$ - общее уравнение прямой,

где $(x; y)$- текущие координаты,

$(A; B)$- координаты нормального вектора.

Задача

Указать нормальные векторы для прямых, заданных уравнениями *1)* $2x - 4y + 5 = 0$;

2) $y = \dfrac{2}{5}x + 17$;

3) $x = 5$

Нормальным вектором первой прямой является вектор $\bar{n} = (2;-4)$; второй- вектор $\bar{n} = \left(\frac{2}{5};-1\right)$; третий - вектор $\bar{n} = (1;0)$.

3.2 Неполные уравнения прямой

В общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$, A, B, C могут принимать различные действительные значения, исключая одновременное равенство нулю A и B.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения $Ax + By + C = 0$, получающиеся при равенстве нулю отдельных его коэффициентов.

1) Пусть в уравнении $Ax + By + C = 0$, $A = 0$, тогда $By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{C}{B}$. Обозначим $-\frac{C}{B} = b$,

получим $y = b$.

$\boxed{y = b}$ - уравнение прямой параллельной оси OX *(рис. 2)*

Если кроме того, $C = 0$, то уравнение $y = b$ примет вид $y = 0$.

$\boxed{y = 0}$ - уравнение прямой, совпадающей с осью OX.

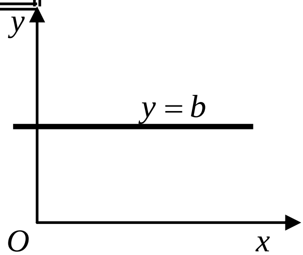


рис. 2

2) Пусть $B=0$, тогда уравнение $Ax+By+C=0$ примет вид $Ax+C=0$, или $x=-\frac{C}{A}$, положим

$-\frac{C}{A}=a$, получим $x=a$.

$\boxed{x=a}$ - уравнение прямой параллельной оси OY *(рис.3)*

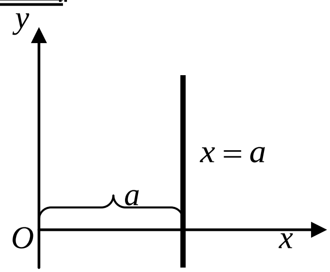


рис.3

Если же кроме того, $C=0$, то уравнение $x=a$ примет вид $x=0$.

$\boxed{x=0}$ - уравнение прямой совпадающей с осью ординат *(рис.4)*

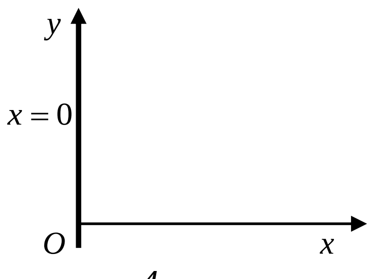
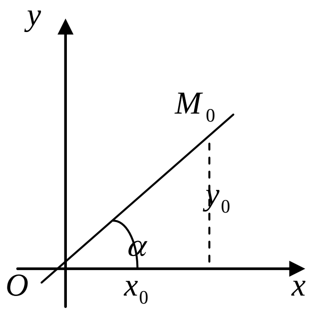


рис.4

3) Пусть в уравнении $Ax+By+C=0$ $C=0$, тогда $Ax+By=0$;

$\Rightarrow\ By=-Ax \quad \Rightarrow y=-\frac{A}{B}x$, положим $\boxed{-\frac{A}{B}=k}$ - формула углового коэффициента прямой из общего уравнения прямой, получим

$\boxed{y = kx}$ - уравнение прямой, проходящей через начало координат *(рис.5)*



Определение: Условным коэффициентом (k) прямой называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси OX.

$\boxed{k = tg\alpha}$ - определение углового коэффициента прямой.

Пример:

Найти угловой коэффициент прямой $2x - 6y + 5 = 0$.

$A = 2; B = -6; C = 5,$

$k = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{2}{-6} = \dfrac{1}{3}.$

Ответ: $k = 1/3$.

3.3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0 \Rightarrow By = -Ax - C \Rightarrow y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$; $-\dfrac{A}{B} = k$; $-\dfrac{C}{B} = b$, получим $y = kx + b$.

$\boxed{y = kx + b}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b.

<u>Пример №1.</u>

Общее уравнение прямой $2x - 3y + 6 = 0$ записать в виде $y = kx + b$.

Решение: <u>I способ:</u> $2x - 3y + 6 = 0$

$$A = 2,\ B = -3,\ C = 6$$

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{6}{-3} = 2$$

$$y = kx + b$$

$$\underline{y = \frac{2}{3}x + 2}.$$

<u>II способ:</u> $2x - 3y + 6 = 0$

$$-3y = -2x - 6$$

$$y = -\frac{2}{-3}x - \frac{6}{-3}$$

$$\underline{y = \frac{2}{3}x + 2}.$$

<u>Пример №2.</u>

Составить уравнение прямой, образующей с положительным направлением оси OX угол $\alpha = 60^0$ и отсекающей на оси OY отрезок, равный 4.

Дано: $\alpha = 60^0$

$b = 4$.

Составить уравнение прямой $Ax + By + C = 0$.

Решение:

$y = kx + b$

$k = tg\alpha \;\Rightarrow\; k = tg60^0 \;\Rightarrow\; k = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x + 4 \;\Rightarrow\; \sqrt{3}x - y + 4 = 0$.

Ответ: $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$.

Упражнения:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с положительным направлением оси OX углы: 1) $\alpha = 30^0$, 2) $\alpha = 135^0$.
2. Найти угловой коэффициент и начальную ординату прямой $4x + 6y - 3 = 0$.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-5;-2)$ и имеющей начальную ординату $b = -12$.
4. Написать общее уравнение прямой из данных прямых и найти координаты её нормального вектора: 1) $y = -3x + 5$, 2) $y = \frac{1}{3}x$.

4.Другие формы уравнения прямой на плоскости

В этом параграфе мы познакомимся с некоторыми другими формами уравнения прямой на плоскости.

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом. Пусть даны точка $M_0(x_0; y_0)$ и угловой коэффициент k прямой, проходящей через точку M_0. Требуется составить уравнение искомой прямой в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

В этом уравнении координаты A и B нормального вектора n нам известны, поэтому постараемся их исключить. Для этого разделим уравнение (1) на B ($B \neq 0$, в противном случае $k = -A/B$ не существует):

$$\frac{A}{B}(x - x_0) + (y - y_0) = 0,$$

откуда

$$(y - y_0) = -\frac{A}{B}(x - x_0),$$

или

$$(y - y_0) = k(x - x_0). \qquad (2)$$

Определение. Уравнение (2) называется *уравнением прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом.*

2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки. Возьмем произвольную точку $M(x; y)$ на этой прямой *(рис. 6)*.

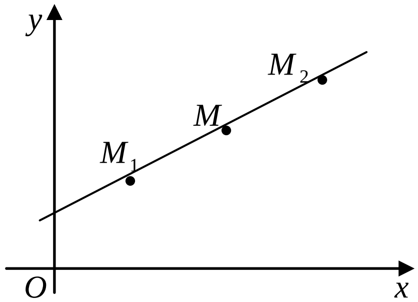


рис. 6

Рассмотрим векторы $\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$ и $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. (3)

Точки M, M_1 и M_2 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы (3) коллинеарны и, следовательно, их координаты пропорциональны. При $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ имеем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

Определение. Уравнение (4) называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки.*

Если $x_1 = x_2$, то прямая параллельна оси Oy и, следовательно, её уравнение имеет вид

$$x = x_1. \tag{5}$$

Если $y_1 = y_2$, то прямая параллельна оси Ox и её уравнение имеет вид

$$y = y_1. \tag{6}$$

Пример:

Даны координаты точек $A(2;4)$ и $B(6;3)$. Составить уравнение прямой AB.

Решение: $\frac{x-2}{6-2} = \frac{y-4}{3-4}$; $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-1}$

$$4y - 16 = -x + 2$$

$$\underline{x + 4y - 18 = 0}.$$

3. Уравнение прямой в отрезках.

Пусть требуется составить уравнение прямой l, отсекающей на оси Ox отрезок величиной a $(a \neq 0)$, а на оси Oy - отрезок величиной b $(b \neq 0)$ *(рис. 7)*.

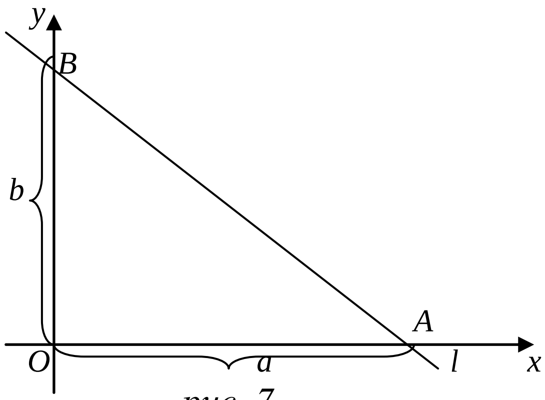


рис. 7

Обозначим точки пересечения прямой l с осями координат Ox и Oy соответственно через точки A и B. Тогда точка A имеет координаты $(a;0)$, а точка B - координаты $(0;b)$. Составим уравнение прямой l как прямой, проходящей через две точки $A(a;0)$ и $B(0;b)$. Заменив в (4) x_1, y_1 координатами точки A и x_2, y_2 - координатами точки B, получим

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0},$$

откуда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (7)$$

Определение. Уравнение (7) называется уравнением в отрезках (оно связывает текущие координаты x и y и величины отрезков a и b, отсекаемые прямой на осях координат).

Пример:

Построить прямую $2x-3y-6=0$.

Решение: Преобразуем данное уравнение к виду (7); для этого перенесем свободный член вправо и разделим обе части на него:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (7), найдем $a=3$ и $b=-2$. Отложим на оси Ox отрезок OA величиной 3 и на оси Oy - отрезок OB величиной -2. Прямая, проведенная через точки A и B, будет искомой *(рис. 8)*.

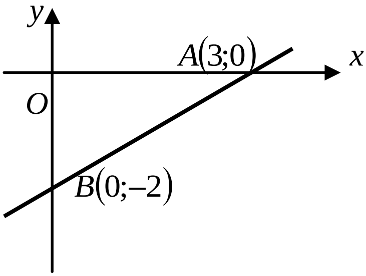


рис. 8

Упражнения:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;-4)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=135^0$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-1)$ и имеющей угловой коэффициент, равный 2.
3. Прямая проходит через точки $A(-1;-6)$ и $B(7;2)$. Найти отрезки, отсекаемые этой прямой на осях Ox и Oy.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;-1)$ и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.
5. Составить уравнение прямой в отрезках, если она пересекает оси координат в точках:

   1) $A(-3;0)$ и $B(0;5)$

   2) $A(2;0)$ и $B(0;-4)$.

6. Найти длину отрезка, заключенного между точками пересечения прямой $\frac{x}{12}-\frac{y}{16}=1$ с осями координат.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, если:

1) $M_1(-2;1),\ M_2(1;-2)$;

2) $M_1(6;0),\ M_2(3;-2)$;

3) $M_1(5;-4),\ M_2(5;2)$;

4) $M_1(1;7),\ M_2(-3;7)$.

8. Написать уравнения в отрезках и построить следующие прямые:

1) $5x-3y+15=0$;

2) $y=\frac{3}{2}x-1$.

9. Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $2x-5y-10=0$ и осями координат.

5. Вычисление угла между прямыми

Пусть требуется определить угол между прямыми l_1 и l_2, заданными в плоскости Oxy уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Вычисление одного из смежных углов между прямыми l_1 и l_2 сводится к вычислению угла φ между нормальными векторами $n_1=(A_1;B_1)$ и $n_2=(A_2;B_2)$ этих прямых *(рис. 9)*

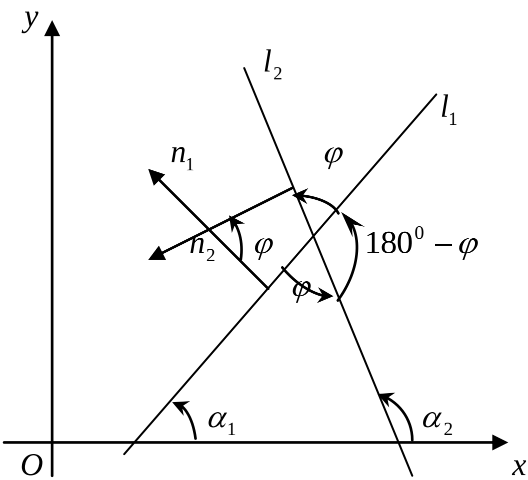


рис. 9

Но $\cos\varphi = \dfrac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}$. Записав правую часть последнего равенства в координатной форме, получаем $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$ - формула вычисления угла между прямыми

<u>Пример №1:</u>

Найти угол между прямыми $7x - y - 2 = 0$ и $x - y + 3 = 0$.

Решение: По формуле $\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ находим

$$\cos\varphi = \frac{7\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{\sqrt{49+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{8}{10} = 0{,}8, \quad \varphi = \arccos 0{,}8 \approx 36^0 56'.$$

Если прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями

$$y = k_1x + b_1 \text{ и } y = k_2x + b_2,$$

то угол φ, на который нужно повернуть прямую l_1 в положительном направлении до совпадения с прямой l_2, можно вычислить через угловые коэффициенты k_1 и k_2 этих прямых. Из *рис. 9* видно, что $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, откуда $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Если прямые l_1 и l_2 не перпендикулярны, т.е. имеет смысл $tg\varphi$, то

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}.$$

Но $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\underline{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.}$$

<u>Пример №2:</u>

Найти острый угол между прямыми $2x - y - 4 = 0$ и $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Решение: Из уравнения $2x - y - 4 = 0$ находим $k_1 = -A/B = -2/(-1) = 2$. Сравнивая уравнение $y = \frac{1}{2}x + 4$ с уравнением $y = kx + b$, находим $k_2 = 1/2$. По формуле имеем

$$tg\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{-3/2}{2}\right| = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

В таблице тангенсов или при помощи микрокалькулятора находим $\varphi = 36^0 52'$.

<u>Упражнения:</u>

1. Вычислить угол между прямыми:

1) $5x - y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$;

2) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 4$;

3) $2x + y = 0$ и $y = 3x - 4$;

4) $3x - 4y - 6 = 0$ и $8x + 6y - 11 = 0$.

2. Вычислить угол между прямой $2x - 3y + 6 = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(4;-5)$ и $B(-3;2)$.

3. Даны уравнения сторон треугольника ABC: $7x + 4y + 9 = 0$ (AB), $x - 8y + 27 = 0$ (BC), $2x - y - 6 = 0$ (AC). Найти внутренние углы треугольника.

6. Пересечение прямых. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

1. Пересечение прямых

Пусть даны две прямые, определяемые уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Требуется найти точку их пересечения. Точка пересечения данных прямых есть их общая точка. Координаты этой точки удовлетворяют как первому, так и второму уравнению, т.е. эти координаты являются общими корнями данных уравнений.

Чтобы найти эти корни, нужно как известно из алгебры, решить совместно данные уравнения, рассматривая их как систему уравнений $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$.

Пример:

Найти точку пересечения прямых $2x + 3y - 12 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.

Решение: Решим данные уравнения как систему

$$\begin{cases} 2x+3y-12=0 \\ x-y-1=0 \qquad \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \quad +\begin{cases} 2x+3y-12=0 \\ 3x-3y-3=0 \end{cases}$$ получим

$5x-15=0 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$, зная x, находим y, например значение x подставляем во второе уравнение $3-y-1=0$

$$-y+2=0$$
$$y=2$$
$$\underline{(3;2)}$$

Ответ: $(3;2)$.

2. Условие параллельности прямых

Пусть даны на плоскости в прямоугольной системе координат Oxy прямые l_1 и l_2, и заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ *(рис. 10)*

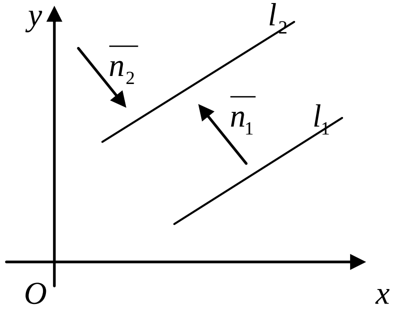


рис. 10

$\overline{n_1}=(A_1;B_1)$, $\overline{n_2}=(A_2;B_2)$

$(\overline{n_1}\perp l_1;\ \ \overline{n_2}\perp l_2;\ \ l_1 \parallel l_2) \Rightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Rightarrow$ векторы $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ коллинеарны значит их одноименные координаты пропорциональны, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

$\boxed{\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}}$ - условие параллельности прямых

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}$$ - условие совпадения прямых

Перепишем равенство $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ или $-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{A_2}{B_2}$, т.к. $-\frac{A_1}{B_1}=k_1$ и $-\frac{A_2}{B_2}=k_2$, то $k_1=k_2$.

$$\boxed{k_1=k_2}$$ - условие параллельности прямых

Таким образом прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны между собой.

Пример №1:

Показать, что прямые $3x-2y+1=0$ и $6x-4y-7=0$ параллельны $l_1 \parallel l_2$, если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

Решение: $3x-2y+1=0$ - l_1 $(A_1=3;\ B_1=-2)$

$6x-4y-7=0$ - l_2 $(A_2=6;\ B_2=-4)$

$$\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow l_1 \parallel l_2.$$

Пример №2:

При каком значении m прямые $4x-3y+9=0$ и $mx+6y-13=0$ будут параллельны.

Решение: $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$

$$\frac{4}{m}=\frac{-3}{6} \Rightarrow -3m=24$$

$$m=-8$$

Ответ: $m=-8$.

Пример №3:

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и параллельной прямой $2x - y + 5 = 0$.

Дано: $A(2;3) \in l_1$

$2x - y + 5 = 0$ - l_2

$l_1 \parallel l_2$

Написать уравнение l_1

Решение:

$y - y_0 = k(x - x_0)$;

Т.к. $l_1 \parallel l_2$, то $k_1 = k_2$

$2x - y + 5 = 0$ - l_2 $(A_2 = 2;\ B_2 = -1)$

$$k_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{2}{-1} = 2;\quad k_1 = k_2 = 2$$

$y - 3 = 2(x - 2)$

$y - 3 = 2x - 4$

$2x - y - 1 = 0$

Ответ: $2x - y - 1 = 0$.

3. Условие перпендикулярности прямых

Пусть на плоскости в системе координат даны два взаимно перпендикулярные прямые l_1 и l_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *(рис. 11)*.

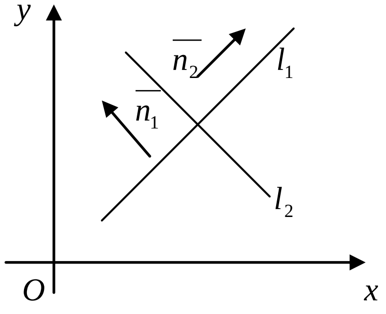


рис. 11

$(\overline{n_1} \perp l_1;\ \overline{n_1} = (A_1; B_1);\ \ \overline{n_2} = (A_2; B_2);\ \overline{n_2} \perp l_2;\ l_1 \perp l_2) \Rightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2}$ $\Rightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$ - условие перпендикулярности прямых

Перепишем равенство $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, если $B_1 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$, то разделим обе части равенства на $B_1 \cdot B_2$, получим $\frac{A_1 \cdot A_2}{B_1 \cdot B_2} + 1 = 0$ или $-\frac{A_1}{B_1} \cdot \left(-\frac{A_2}{B_2}\right) + 1 = 0$; $-\frac{A_1}{B_1} = k_1$ и $-\frac{A_2}{B_2} = k_2$, то $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$, отсюда при $k_1 \neq 0$ имеем $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}$ - условие перпендикулярности прямых

Таким образом, прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратные по величине и противоположны по знаку.

Пример №1:

Показать, что прямые $6x - 15y + 7 = 0$ и $10x + 4y - 1 = 0$ перпендикулярны.

Решение:

$l_1 \perp l_2$, если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

$6x - 15y + 7 = 0$ - l_1 $(A_1 = 6;\ B_1 = -15)$

$10x + 4y - 1 = 0$ - l_2 $(A_2 = 10;\ B_2 = 4)$

$6 \cdot 10 + (-15) \cdot 4 = 60 - 60 = 0 \Rightarrow l_1 \perp l_2$.

Пример №2:

Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;-5)$ и перпендикулярной прямой $3x - 6y + 7 = 0$.

Дано: $A(4;-5) \in l_1$

$3x-6y+7=0$ - l_2

$l_1 \perp l_2$

Написать уравнение l_1

Решение:

$y-y_0=k(x-x_0)$

$l_1 \perp l_2 \quad \Rightarrow \quad k_2=-\dfrac{1}{k_1}$

$3x-6y+7=0$ - l_2 $\quad (A_2=3; \quad B_2=-6) \quad \Rightarrow \quad k_2=-\dfrac{3}{-6}=\dfrac{1}{2};$

$k_1=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$; $y+5=2(x-4)$; $\underline{2x-y-13=0}$

Ответ: $\underline{2x-y-13=0}$.

Упражнения:

1. Найти точку пересечения двух прямых:
   1) $3x-2y-4=0$ и $x+3y-5=0$;
   2) $x-5y+7=0$ и $-3x+15y-4=0$.
2. Параллельны ли прямые:
   1) $2x+3y-7=0$ и $4x+6y+9=0$;
   2) $-2x+y-3=0$ и $8x-4y+1=0$;
   3) $3x-5y=0$ и $6x+10y+5=0$.
3. Перпендикулярны ли прямые:
   1) $3x-y-3=0$ и $x+3y-17=0$;
   2) $2x+5y-6=0$ и $5x+2y-3=0$.
4. При каких значениях m прямые $3x-7y+9=0$ и $6x+my-3=0$ параллельны.
5. При каких значениях n прямые $4x+9y-8=0$ и $nx-6y+7=0$ перпендикулярны.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;-3)$, параллельной прямой $3x-y+9=0$.

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;-1)$ и перпендикулярной прямой $x-3y-7=0$.

<u>Вопросы для повторения:</u>

1. Какое вы знаете уравнение линии на плоскости?
2. Дайте определение нормального вектора прямой.
3. Каково уравнение прямой, проходящей через данную точку и нормальным вектором?
4. Какое уравнение прямой называется общим?
5. Какие вы знаете частные случаи уравнения прямой?
6. Каково уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой?
7. Какое знаете уравнение прямой, проходящей через точку с заданным направлением (пучок прямых)?
8. По какой формуле можно написать уравнение прямой, проходящей через две точки?
9. Что представляет собой уравнение прямой в отрезках?
10. Как найти угол между прямыми.
11. Какие условия параллельности прямых знаете?
12. Какие условия перпендикулярности прямых знаете?
13. По какой формуле можно найти координаты точки пересечения прямых?

<u>Зачетная работа</u>
«Прямая на плоскости»

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и перпендикулярной вектору $\overline{MN}$, если $M(-3;2)$ и $N(1;0)$.
2. При каких значениях m прямые $3x+my-19=0$ и $4x-15y+7=0$ параллельны?
3. При каких значениях p прямые $2x+17y-5=0$ и $px-4y+3=0$ перпендикулярны?
4. Найти угол между прямыми $\frac{y}{8}-\frac{x}{4}=1$ и $\frac{x}{2}+\frac{y}{0{,}8}=1$.
5. Определить длину отрезка прямой $4x+3y-24=0$, заключенного между точками пересечения прямой с осями координат.

Литература:

1. А.А. Дадаян «Математика» Профессиональное образование
2. Зайцев «Элементы высшей математики»
3. Г.Н. Яковлев «Математика для техникумов»
4. И.И. Валуцэ «Математика для техникумов»
5. Н.В. Богомолов «Практические занятия по математике».