**Тамбовское областное государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение "Котовский индустриальный техникум"**

Александров Владислав Николаевич

# Основы интегрального исчисления

**Методическая разработка**
**по дисциплине «Основы высшей математики»**

для студентов II курса специальностей
09.02.02 и 09.02.03.

Котовск
2020

**Рассмотрено и одобрено** **УТВЕРЖДАЮ**

на заседании ПЦК 09.02.03. зам. директора по УР

протокол № _____________ ______Улуханова И.В.

.

от «___»_____________20__ г. «___»____________20__ г

Председатель ПЦК: _____________

( Мартынова Н.В.)

преподаватель спец.дисциплин

Рецензент: _____________

(Мухин А.С.)

преподаватель спец.дисциплин

Разработал: _____________

(Александров В.Н.)

преподаватель спец.дисциплин

## Пояснительная записка

Тема «Интегральное исчисление» является наиболее сложной для восприятия обучающимися, так как является ключевым разделом математического анализа, поглощающим в себя раздел «Дифференциальное исчисление», который так же является наиболее сложным разделом математики.

В данной работе рассматриваются основные способы и методы решения неопределённых и определённых интегралов, есть задания для самостоятельного решения, необходимые для выполнения практических занятий и самостоятельных работ по разделу «Интегральное исчисление» в количестве 12 часов.

Также в работе приводится перечень теоретических вопросов, составленных на основе ФГОС СПО по математике для специальностей 09.02.02 и 09.02.03.

## Содержание

## Теоретические вопросы

1. Первообразная функции и неопределённый интеграл.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Методы интегрирования неопределенного интеграла: разложения, замены переменной и интегрирования по частям.
4. Интегрирование отдельных классов функций.
5. Понятие определенного интеграла.
6. Формула Ньютона-Лейбница.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
8. Геометрические приложения определённого интеграла: вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения.

## Задания для самостоятельной работы

### № 1. Найти неопределенные интегралы:

**0.** А) $\int \frac{2x^4+5x^2-3}{x^2}dx$ Б) $\int x^4 \cdot \sqrt{x^5-7}dx$ В) $\int (1-6x)e^x dx$

**1.** А) $\int (6e^x - 5\cos x)dx$ Б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$ В) $\int x \cdot \sin 4x \cdot dx$

**2.** А) $\int \left(\frac{1}{x} - 3x + \pi\right)dx$ Б) $\int \frac{\sin x}{3+\cos x}dx$ В) $\int x^3 \cdot \ln x \cdot dx$

**3.** А) $\int \left(\frac{4-x^3+x}{x^2}\right)dx$ Б) $\int \frac{dx}{x(\ln x - 2)}$ В) $\int (2-4x)\cos 2x dx$

**4.** А) $\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$ Б) $\int \frac{x^3 dx}{5x^4+1}$ В) $\int \arccos x dx$

**5.** А) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{\pi}{\sin^2 x}\right)dx$ Б) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+8}$ В) $\int x \cdot arctg 2x dx$

**6.** А) $\int \left(x^2 + \frac{x+3xe^x}{x}\right)dx$ Б) $\int \frac{dx}{7-9x}$ В) $\int arcctg x dx$

**7.** А) $\int \frac{x^3+4x-5}{\sqrt{x}}dx$ Б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ В) $\int xe^{-6x}dx$

**8.** А) $\int \left(\cos x - 7\sin x + \sqrt[5]{x^3}\right)dx$ Б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$ В) $\int \ln(4x-1)dx$

**9.** А) $\int \left(x^4 - 8e^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ Б) $\int \frac{3x^2+5}{x^3+5x-8}dx$ В) $\int 9x\arcsin x dx$

## № 2. Найти определенные интегралы:

**0.** А) $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Б) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$ В) $\int\limits_0^{\pi} (4x+7)\cos 2x dx$

**1.** А) $\int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}dx$ Б) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-2x}dx$ В) $\int\limits_0^{\pi} (9x+1)\cos 3x dx$

**2.** А) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$ Б) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx$ В) $\int\limits_0^{\pi} (16x+17)\sin x dx$

**3.** А) $\int\limits_0^2 \left(x^2+3x-1\right)dx$ Б) $\int\limits_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ В) $\int\limits_0^2 6xe^{3x}dx$

**4.** А) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x+1)dx$ Б) $\int\limits_0^{\pi/4} tgx dx$ В) $\int\limits_0^{2\pi} (15x+1)\cos x dx$

**5.** А) $\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x}$ Б) $\int_{0}^{1} \frac{x^3 dx}{x^4+1}$ В) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 7x\sin 2x dx$

**6.** А) $\int_{0}^{\ln 3} e^x dx$ Б) $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{x+1}$ В) $\int_{0}^{\pi} (5x+6)\cos 4x dx$

**7.** А) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ Б) $\int_{-1}^{1/2} \frac{dx}{x^2-4}$ В) $\int_{0}^{1} \ln\left(x^2+4\right)dx$

**8.** А) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$ Б) $\int_{0}^{2} xe^{x^2} dx$ В) $\int_{0}^{\pi/4} x\,arctg x dx$

**9.** А) $\int_{0}^{1} \left(\sqrt[3]{x^4} - x^4\right)dx$ Б) $\int_{0}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ В) $\int_{0}^{\pi/2} (4x+3)\sin 2x dx$

## 3. Решение типовых примеров

**1.** Найти неопределенный интеграл:

а) $\int \frac{x^3 - 5x + 3}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int (3x-1)^{100} dx$;

в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^3}} dx$; г) $\int (5x-2) e^{3x} dx$.

### Справочный материал

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)*, если *(F(x))'=f(x)*.

Первообразная определена неоднозначно: если *F(x)* – первообразная для функции *f(x)*, то *F(x)+C* – также первообразная для данной функции.

Множество всех первообразных для функции *f(x)* называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$, где *f(x)* – подынтегральная функция, *f(x)dx* – подынтегральное выражение, *C* – произвольная постоянная (*C* = *const*), $\int$ - знак операции интегрирования, *d* – знак операции дифференцирования.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx$, где $c = const$.

2. $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

## Таблица 1 (неопределенных интегралов)

| | |
|---|---|
| 1. $\int 0dx = C,$ | 9. $\int \cos x dx = \sin x + C$; |
| 2. $\int dx = x + C,$ | 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ |
| 3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1;$ | 11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$; |
| 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$; | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ ($\lvert x\rvert<a$, $a\neq 0$); |
| 5. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$; | 13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$ ($a\neq 0$); |
| 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$ | 14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ ($\lvert x\rvert\neq a$, $a\neq 0$); |
| 7. $\int e^x dx = e^x + C$; | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$. |
| 8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; | |

Решение. а) $\int \frac{x^3-5x+3}{\sqrt{x}}dx$

Чтобы найти данный неопределенный интеграл, воспользуемся методом разложения, который заключается в разложении подынтегральной функции на сумму функций и использовании свойств неопределенного интеграла 1 и 2.

$$\int \frac{x^3-5x+3}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{x^3}{\sqrt{x}} - \frac{5x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx =($$

св-во 2) =

$= \int x^{\frac{5}{2}}dx - \int 5x^{\frac{1}{2}}dx + \int \frac{3}{\sqrt{x}}dx$ = (св-во 1) =

$\int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{\frac{1}{2}}dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$(используем формулы 3 и 4

из таблицы 1 н.и.)= $\dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 5\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3\cdot 2\sqrt{x} + C =$

$= \frac{2x^3\sqrt{x}}{7} - \frac{10x\sqrt{x}}{3} + 6\sqrt{x} + C$.

Ответ: $\int \frac{x^3-5x+3}{\sqrt{x}}dx = \frac{2x^3\sqrt{x}}{7} - \frac{10x\sqrt{x}}{3} + 6\sqrt{x} + C$.

б) $\int (3x-1)^{100}dx$.

Данный интеграл вычисляется <u>методом замены переменной</u> (линейная замена). Обозначим выражение в скобках через $t$: <u>$3x - 1 = t$</u>, тогда $d(3x - 1)=dt$ => $3dx = dt$ => $\underline{dx = \frac{1}{3}dt}$.

$\int (3x-1)^{100}dx = \int t^{100}\cdot\frac{1}{3}\cdot dt = \frac{1}{3}\int t^{100}\cdot dt =$ (по формуле 3 из таблицы 1 н.и.) $= =\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{101}}{101}+C = \frac{t^{101}}{303}+C = \frac{(3x-1)^{101}}{303}+C$.

Ответ: $\int (3x-1)^{100}dx = \frac{(3x-1)^{101}}{303}+C$.

в) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^3}}dx$.

Здесь при вычислении интеграла используется также <u>метод замены переменной</u> (нелинейная замена).

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^3}}dx = \left\{ \begin{array}{l} 1-3x^3 = t \\ -9x^2dx = dt \\ dx = -\dfrac{1}{9x^2}dt \end{array} \right\} = \int \frac{x^2}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{9x^2}\right)dt = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{9}\right)dt$$

$= -\dfrac{1}{9}\int \dfrac{1}{\sqrt{t}}dt$ = (используем формулу 4 из табл.1 н.и.) = $-\dfrac{1}{9}\cdot 2\sqrt{t}+C = -\dfrac{2}{9}\sqrt{1-3x^3}+C$.

Ответ: $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-3x^3}}dx = -\dfrac{2}{9}\sqrt{1-3x^3}+C$.

г) $\int (5x-2)e^{3x}dx$.

Для решения этого примера нужно использовать метод интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям имеет вид: $\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$.

Этот метод применяется для двух групп интегралов:

**I**. $\int xe^{mx}dx$; $\int x\cdot \cos mx dx$; $\int x \cdot \sin mx dx$ (где $m$=const).

В этой группе в качестве $u$ выбирают $x$, а остальная часть подынтегрального выражения принимается за $dv$ ($\boldsymbol{u = x}$).

**II**. $\int x \cdot \ln mxdx$; $\int x \cdot \arccos mxdx$; $\int x \cdot \arcsin mxdx$; $\int x \cdot arctgmxdx$; $\int x \cdot arcctgmxdx$ (где $m$=const). В этой группе $\boldsymbol{xdx = dv}$.

В нашем случае интеграл относится к первой группе интегралов, поэтому в качестве $u$ возьмем $5x - 2$ ($u = 5x - 2$), а $dv = e^{3x} \cdot dx$.

$$\int (5x-2)e^{3x}dx = \left\{ \begin{aligned} & u = 5x - 2 \Rightarrow du = 5dx \\ & dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{aligned} \right\} =$$

(по формуле интегрирования по частям) = $(5x-2) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 5dx =$

$$(5x-2) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{5}{3}\int e^{3x}dx = \frac{5x-2}{3}e^{3x} - \frac{5}{9}e^{3x} + C.$$

Ответ: $\int (5x-2)e^{3x}dx = \frac{5x-2}{3}e^{3x} - \frac{5}{9}e^{3x} + C$.

**2.** Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$.

## Справочный материал

Для вычисления определенных интегралов используется формула Ньютона-Лейбница:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}.$$

(где $a$ – нижний предел интегрирования, $b$ – верхний предел, $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$. Для нахождения первообразной $F(x)$ используются те же методы, что и при вычислении неопределенных интегралов).

<u>Решение.</u>

а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$ (формула 9 табл. 1 н.и.) $= \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$

$$\arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}$.

б) Используем метод замены переменной: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{aligned} & \cos x = t \\ & -\sin x dx = dt \\ & x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1 \\ & x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} =$$ (по формуле 3 табл.1 н.и.)= $-\ln t \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1) =$ (т.к. ln1 = 0)= $-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2}$ .

Ответ: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx = \ln \sqrt{2}$ .

<u>Замечание</u>: В отличие от метода замены для неопределенных интегралов, для определенных интегралов нет необходимости возвращаться к старой переменной интегрирования ($x$), если перейти к новым пределам интегрирования (в нашем примере старыми пределами были $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, а новыми стали $a = 1$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

## Список использованной литературы

### Основная:

1. Высшая математика для ССУЗов / Н.Ш. Кремер и др. - М.: ЮНИТИ, 2014


### Дополнительная:

1. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2010 г. – 656 с.
2. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: в 2-х частях. Ч.1. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 224с.
3. Справочник по высшей математике / Под ред. М.Я.Выгодского. – М.: Наука, 1966 г.